Kleine AG:
Gromov-Witten-Invarianten

Organisatoren: Heinrich Hartmann, Timo Schürg

am 04.10.2008 in Mainz

Einleitung

Gegeben eine nichtsinguläre, projektive algebraische Varietät W mit n gewählten Zykeln Z_i, wie viele Kurven vom Geschlecht g und Grad d gibt es, die alle Z_i schneiden? Diese Frage beantworten genau die *Gromov-Witten-Invarianten.* Im allgemeinen ist die Beantwortung dieser Frage technisch sehr aufwändig. In dieser kleinen AG wollen wir uns auf den einfachsten Fall beschränken. Bei uns wird das Geschlecht der Kurve 0 und die Varietät immer der projektive Raum sein. Ziel dieser AG ist es, die Formel von Kontsevich für die Anzahl der ebenen rationalen Kurven vom Grad d durch $3d-1$ Punkte herzuleiten und die allgemeine Konstruktion von Gromov-Witten-Invarianten kurz anzureißen.
Ausgangspunkt für die Konstruktion von Gromov-Witten-Invarianten ist der Modulraum der stabilen Kurven (Vortrag 1). Aus diesem Raum lässt sich der Modulraum der stabilen Abbildungen konstruieren. Dies sind (nicht notwendigerweise stabile) Kurven zusammen mit einer Abbildung in eine fest gewählte Varietät W und vorgegebenen Grad , wobei die Abbildung nur stabile Komponenten kontrahieren darf (Vortrag 2,3). Dieser Modulraum besitzt kanonische Auwertungsabbildungen nach W. Über diese Auswertungsabbildung zieht man die oben gewählten Z_i zurück, multipliziert sie im Kohomologiering des Modulraums und integriert sie dort (Vortrag 4,5). Die Zahl, die herauskommt ist gerade die Gromov-Witten-Invariante. Dass diese Zahl wirklich das oben beschriebenen Zählproblem löst, soll explizit bewiesen werden.
Als Textgrundlage haben wir uns für das Buch [KV] entschieden. Es handelt sich um ein sehr nettes Buch, dass den Leser an die Hand nimmt und ihm verständlich erklärt, warum der nächste Schritt wichtig ist. Wir hoffen, in den fünf Vorträgen die ersten vier Kapitel abdecken zu können. Nach dem Besuch dieser kleinen AG sollte man in der Lage sein, weiterführende Literatur wie die berühmen Santa-Cruz-Notes [FP] zu verstehen.

Im Folgenden stellen wir die Inhalte der entsprechenden Kapitel kurz vor und machen Inhalte deutlich, die in späteren Vorträgen entscheidend sein werden. Es liegt jedoch in der Verantwortung des Sprechers den Stoff so auszuwählen sodass der Vortrag in der Zeit bleibt und trotzdem alles wichtige abdeckt.
Kapitel 0 in [KV] ist eine allgemeine elementare Einführung in Modulräume mit denen die meisten ja gut vertraut sind. Daher wird diese Kapitel nicht mit einem Vortrag gewürdigt, darf aber trotzdem gerne (als Hausaufgabe) gelesen werden.

1 Vortrag/Kapitel 1: Stabile Kurven (45 Minuten)

Eine n-punktierte rationale Kurve ist eine rationale Kurve $C \cong \mathbb{P}^1$ zusammen mit n ausgezeichneten Punkten $(p_1, \dots, p_n)$. Für $n \geq 3$ existiert ein feiner Modulraum $M_{0,n}$ der durch Hinzunahme von

stabilen rationalen Kurven kompaktifiziert werden kann[1]. Diese Definitionen sollten am Beispiel $\overline{M}_{0,4}$ illustriert werden.
Es gibt kanonische Methoden einer n-punktierten stabilen Kurve Markierungen hinzuzufügen und diese zu vergessen: Stabilisierung und Kontraktion. Diese sollten auf jeden Fall vorgestellt werden. Wenn es die Zeit erlaubt, wäre es schön, den Beweis für Stabilisierung/Kontraktion von Familien aus [Knutsen] zu sehen.
Kontraktion und Stabilisierung geben die Möglichkeit, $\overline{M}_{0,n}$ induktiv zu konstruieren. Hier sollte zumindest die Idee erklärt werden.
Wichtig ist die Beschreibung des Randes $D = \overline{M}_{0,n} \setminus M_{0,n}$ aus Abschnitt 1.5. Hier sollten insbesondere die speziellen Randdivisoren $D(A|B)$ eingeführt und deren Relation (1.5.13.1) bewiesen werden.

2 Vortrag/Kapitel 2: Stabile Abbildungen (45 Minuten)

Die beiden einleitenden Abschnitte überspringen wir und kommen gleich zur Definition einer stabilen Abbildung in projektive Räume nach Kontsevich. Das sind Abbildungen $\mu : C \to \mathbb{P}^r$, wobei C ein "markierter Kurven-Baum" ist, dessen kontrahierte Komponenten die Stablitätsbedingung aus Vortrag 1 erfüllen.
Es gibt einen groben Modulraum $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Der Abschnitt (2.4) skizziert die Konstruktion (wahrscheinlich wird man darauf mangels Zeit nicht eingehen können).
Es gibt verschiedene wichtige Abbildung von $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$: Man kann eine stabile Abbildung μ an markierten Punkten auswerten, markierte Punkte vergessen oder die Abbildung vergessen. Die Definition und Eigenschaften dieser Abbildungen sollten zumindest kurz vorgestellt werden. (Flachheit der Auswertungsabbildung beweisen).
Danach kommt der wichtigste Teil: Die Beschreibung des Randes (Abschnitt 2.7). Insbesondere die fundamentale Relation (2.7.5.1) wird später an entscheidender Stelle benutzt werden. Es kann auf die Beispiele und Eigenschaften in Abschnitt 2.8 eingeangen werden (so die Zeit reicht).

3 Vortrag/Kapitel 3: Enumerative Geoemetrie und Kontseivchs Formel (60 Minuten)

Der erste Abschnitt (3.1.2) enthält etwas philosophissches Vorgeplänkel über das Lösen von Zählproblemen mit Hilfe von Modulräumen. Es wäre sicherlich gut wenn man dazu ein paar Worte verlieren würde.
Wir wollen in diesem Kapitel N_d, die Anzahl rationaler Kurven vom Grad d in $\mathbb{P}^2$ durch $3d - 1$ Punkte allgemeiner Lage, berechnen. Wir wissen, dass durch zwei Punkte in der Ebene genau eine Gerade geht. Mit anderen Worten: $N_1 = 1$. Im Vortrag soll die Berechnung von N_2 ausführlich diskutiert werden. Diese benutzt unsere neuen Methoden. Die Berechnung $N_3 = 12$ ist ebenfalls interessant, kann bei Zeitmangel aber ggf. weggelassen werden.
Kontsevichs Rekursionsformel Satz 3.3.1 ist sicherlich der Star dieses Kapitels (bitte beweisen).
Im Abschnitt über Transversalität reicht es, die Ergebnisse anzugeben. Abschließend müssen wir noch klären, dass Zählen von stabilen Abbildungen wirklich das selbe wie das Zählen von rationalen Kurven ist. In Abschnitt 3.5.1 wird erklärt, warum das a priori nicht klar ist. Die Lemmata 3.5.3 und 3.5.5 beweisen jedoch genau dies. Die hübschen Bildchen sollten den Zuhörern nicht vorenthalten werden.

[1] Die 0 in $M_{0,n}$ steht für das Geschlecht einer rationalen Kurve

4 Vortrag 4/Kapitel 4: Definition und elementare Eigenschaften von Gromov-Witten-Invarianten (45 Minuten)

Zu Beginn dieses Vortrags sollte kurz die Schnitttheorie aus Abschnitt 4.1.2 wiederholt werden (eventuell kürzer als im Buch vorgesehen). Danach folgt die formale Definition von Gromov-Witten-Invarianten und der Zusammenhang zu unserem Zählproblem (Proposition 4.1.5, Korollar 4.1.6). In Abschnitt 4.2 werden dann erste Eigenschaften der Invarianten gezeigt. Mit Hilfe dieser Eigenschaften folgt, dass alle Invarianten des $\mathbb{P}^2$ bereits durch Kontsevichs Formel bestimmt sind (Beispiel 4.2.5).

5 Vortrag 5/Kapitel 4: Rekursion Reloaded (30 Minuten)

Zunächst wird das Splitting Lemmas (Lemma 4.3.5) bewiesen. Aussage dieses Lemmas ist, dass sich Integrale über Randdivisioren mit Hilfe der oben bereits erwähnten fundamentalen Relation (2.7.5.1) berechnen lassen. Als Anwendung dieses Ergebnisses berechnen wir nochmals N_2 aus Vortrag 3 (Einleitung zu Abschnitt 4.4). Der Rest der Zeit sollte auf Theorem 4.4.1 verwendet werden. Aussage dieses Satzes ist, dass eine Rekursionsformel für Gromov-Witten-Invarianten auch für den $\mathbb{P}^r$ gibt.

References

[KV] Joachim Kock und Israel Vainsencher, An Invitation to Quantum Cohomology, Birkäuser

[Knutsen] Finn Knudsen, Projectivity of the Moduli Space of Curves, II, Math. Scand. 52 (1983), 1225-1265

[FP] W. Fulton und R. Pandharipande, Notes on Stable Maps and Quantum Cohomology