Kleine AG
Simultane Auflösungen von Singularitäten

am 12. Mai 2007 in Bonn

Organisatoren: Christian Liedtke (Düsseldorf)
Oliver Lorscheid (Utrecht)

1. Einleitung

Wenn man weiß (oder akzeptiert), daß sich Singularitäten von normalen Flächen auflösen lassen, kann man sich die folgende Frage stellen: Gegeben eine flache Familie $f : X \to S$ von normalen Flächen, gibt es eine *simultane* Auflösung der Singularitäten dieser Familie? D.h. gesucht ist ein Morphismus $\tilde{f} : \tilde{X} \to S$, der über f faktorisiert und faserweise die Singularitäten der Familie f auflöst.

Es nicht allzu schwer einzusehen, daß so etwas im allgemeinen unmöglich ist. Ganz anders sieht es allerdings aus, wenn man sich fragt, ob es eine surjektive Abbildung von endlichem Typ $\tilde{S} \to S$ gibt - vielleicht ja sogar endlich - so daß die Familie nach Basiswechsel $f \times_S \tilde{S} : X \times_S \tilde{S} \to \tilde{S}$ eine simultane Auflösung ihrer Singularitäten besitzt. In der Kategorie der Schemata ist dies das zwar im allgemeinen immer noch unmöglich, allerdings hat Artin [Art74] bewiesen, daß dies immer nach Basiswechsel zu einem geeigneten algebraischen Raum möglich ist. Dies zu verstehen - und um Deformationstheorie kennen zu lernen und „in Aktion zu erleben“ - ist das Ziel dieser Kleinen AG.

Wie beweist man so ein Resultat? Dazu betrachtet Artin den Funktor

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Res}(X/S) & : & \text{Schemata über } S & \to & \text{Mengen} \\ & & S' & \mapsto & \{\text{Menge der simultanen Auflösungen von} f \times_S S'\}, \end{array}$$

der das Problem „universell“ löst. Angenommen, wir könnten zeigen, daß dieser Funktor durch ein Schema $\mathcal{R}$ dargestellt wird. Dann enthielte $\mathrm{Res}(X/S)(\mathcal{R}) \cong Hom(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ ein Element (nämlich die Identität), wäre also nicht-leer und es würde folgen, daß die Familie f nach Basiswechsel $f \times_S \mathcal{R} : X \times_S \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ eine simultane Auflösung ihrer Singularitäten besitzt.

Wir müssen also die Darstellbarkeit von $\mathrm{Res}(X/S)$ beweisen. Dazu werden wir diesen Funktor schrittweise algebraisieren:

Zunächst einmal studieren wir (Vorträge 1 und 2) ganz allgemein Funktoren von der Kategorie der artinschen Λ-Algebren (wobei Λ ein vollständiger lokaler Ring ist) in die Kategorie der Mengen. Die Arbeit von Schlessinger liefert dann Kriterien, wann so ein Funktor durch eine vollständige lokale Λ-Algebra pro-darstellbar ist, bzw. eine pro-darstellbare Hülle besitzt.

Wir wollen nun aber einen Funktor F von der Kategorie der Schemata über einer Basis S in die Kategorie der Mengen darstellen. Gegeben eine lokale $\mathcal{O}_S$-Algebra, so können wir diese vervollständigen und erhalten so einen vollständigen lokalen Ring Λ, auf den wir Schlessingers Theorie anwenden. Liefert diese dann eine pro-darstellbare Hülle $\bar{A}$ und ist die Deformation formal versell und effektiv, so besagt Artins Algebraisierungssatz (Vortrag 3), daß $\bar{A}$ die Vervollständigung einer $\mathcal{O}_S$-Algebra von endlichem Typ ist. Das Problem, den Funktor darzustellen, haben wir dann fast schon lokal gelöst.

Erfüllt der Funktor F nun gewisse Garbenaxiome und haben wir effektive Pro-Darstellbarkeit so liefert ein weiterer Satz von Artin (Vortrag 4) die Existenz eines Schemas X von endlichem Typ über S und ein Element $\xi \in F(X)$, so daß der zugehörige Morphismus von Funktoren $\xi : X \to F$ formal étale ist. Die Idee ist dabei, die lokal gefundenen Schemata von Vortrag 3 zu dem gesuchten X zu verkleben.

Der Funktor F wird somit dargestellt durch das Schema X modulo einer étalen Äquivalenzrelation, also durch einen algebraischen Raum. Wünschenswert wäre nun zwar, daß dieser Quotient ein Schema ist, doch ist dies im allgemeinen zu viel verlangt, wie das Beispiel der simultanen Auflösungen zeigen wird.

Im letzten Vortrag wenden wir die vorangegangene Arbeit auf unseren Funktor $\mathrm{Res}(X/S)$ an. Als Resultat erhalt wir, daß der Funktor $\mathrm{Res}(X/S)$ durch einen algebraischen Raum dargestellt wird. Wir haben das Problem der simultanen Auflösungen somit durch Deformationstheorie gelöst, ohne eine einzige Auflösung explizit berechnet zu haben!

2. Das Programm

1. Vortrag: Schlessingers Theorie, Teil I (30min)

Zunächst eine knappe Einführung wie in [Schl68, Abschnitt 0] und den ersten Zeilen von [Schl68, Abschnitt 2]. Danach die Kategorien $\mathcal{C}_\Lambda$, $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ und den Zariski-Kotangentialraum definieren, sowie [Schl68, Lemma 1.1] (ohne Beweis) anschreiben. Danach benötigen wir die Begriffe der kleinen Erweiterung und der essentiellen Surjektion, sowie [Schl68, Lemma 1.4] (den Beweis kurz skizzieren).

Nun globale Funktoren und den Zusammenhang zur vervollständigten Theorie wie am Anfang von [Schl68, Abschnitt 2] erläutern - das wird die Schnittstelle zu den späteren Vorträgen! Glatte Funktoren definieren und [Schl68, Proposition 2.5] bringen (ohne Beweis). Zum Schluß noch den Tangentialraum eines Funktors definieren.

2. Vortrag: Schlessingers Theorie, Teil II (45min)

Zunächst pro-darstellbare Hüllen definieren und deren Eindeutigkeit skizzieren [Schl68, Proposition 2.9]. Ebenfalls nur kurz zeigen, wie der Tangentialraum eines Funktors eine kanonische Vektorraumstruktur erhält [Schl68, Lemma 2.10].

Erster Höhepunkt des Vortrags ist [Schl68, Theorem 2.11]. Es wäre schön, wenn zumindest gezeigt oder anskizziert werden könnte, warum die Bedingungen $H1$-$H3$ (bzw. $H4$) die Existenz einer pro-darstellbaren Hülle (bzw. Pro-Darstellbarkeit) implizieren.

Als wichtige Anwendung benötigen wir dann einen Überblick über [Schl68, Abschnitt 3.7] (dabei [Schl68, Lemma 3.8] ohne Beweis), insbesondere werden die Bedingungen $H1$-$H4$ hier ein wenig „mit Leben gefüllt“. Die Aussage [Schl68, Proposition 3.10], die wir für später benötigen und die schon für sich genommen interessant ist, folgt dann fast schon automatisch.

3. Vortrag: Algebraisierung formaler Moduli (45min)

Zunächst müssen die Begriffe der infinitesimalen Deformation, der effektiven formalen Deformation und der (uni-)versellen Deformation wie in [Art69b, Abschnitt 1] eingeführt werden. Es sollte kurz darauf hingewiesen werden, daß die Existenz formaler verseller Deformationen mit Hilfe der vorangegangenen Vorträge, also Schlessingers Theorie, beantwortet wird. Dann definieren, wann ein Funktor lokal von endlichem Typ ist [Art69a, Definition 1.5].

Ziel dieses Vortrags ist der Satz [Art69b, Theorem 1.6], der es ermöglicht, von der pro-darstellbaren Hülle auf die Existenz einer versellen Deformation zu schließen, die von endlichem Typ über S ist. Dies kann man als „lokale Lösung“ des Problems der Darstellbarkeit ansehen. Der Satz [Art69b, Theorem 1.7] sollte auch angeschrieben werden.

In der nun verbleibenden Zeit sollte so viel wie möglich zum Beweis von [Art69b, Theorem 1.6] gesagt werden. Zunächst einmal muß dazu Artins Approximationssatz [Art69a, Theorem 1.12] zitiert werden, zu dem wir aus Zeitgründen leider gar nichts sagen können. Der Beweis steht in [Art69b, Abschnitt 2], es lohnt sich aber, sich den Überblick in [Art73, S. 68-71] anzuschauen.

4. Vortrag: Darstellbarkeit durch algebraische Räume (45min)

Zunächst sollte ganz kurz an die étale Topologie erinnert werden und dann algebraische Räume wie in [Art69b, Abschnitt 3] eingeführt werden. Ferner benötigen wir die Begriffe formal étale und relativ darstellbar, sowie [Art69b, Lemma 3.3] (Beweis bestenfalls skizzieren).

Das erste Ziel dieses Vortrags ist [Art69b, Theorem 3.4]. Zu dem Beweis sollte möglichst viel gesagt werden. Die Separiertheit kann dabei getrost vernachlässigt werden, da $\mathrm{Res}(X/S)$ sowieso nicht separiert sein wird (vgl. den Anfang von [Art74, Abschnitt 2]).

Jetzt soll der Funktor $\mathrm{Res}(X/S)$ eingeführt werden [Art74, Abschnitt 1]. Kurz erwähnen, daß dieser Funktor das Garbenaxiom erfüllt und zeigen, daß es reicht, den Funktor für affine X und S darzustellen [Art74, S. 334]. Danach die Effektivität [Art74, Lemma 2.2] (mit Beweisskizze) zeigen, obwohl wir genau genommen Pro-Darstellbarkeit noch nicht bewiesen haben.

5. Vortrag: Simultane Auflösungen (45min)

Als erstes sollen die Begriffe Deformationssituation und Deformationstheorie wie in [Art69b, Abschnitt 5] eingeführt werden. Die einzigen (für uns wichtigen) Deformationstheorien sind dabei die, die von Schlessingers Theorie herkommen (siehe [Art69b, S.47 unten]).

Mit einer Deformationstheorie können die Voraussetzungen von [Art69b, Theorem 3.4] in „kleine Häppchen“ aufgeteilt und relativ einfach überprüft werden [Art69b, Theorem 5.3]. Hier bietet sich an, die Aussage dieses Satzes in Form eines Handouts zu verteilen, um Zeit und Schreibarbeit zu sparen (die Organisatoren helfen gerne).

Dieser Satz [Art69b, Theorem 5.3] wird nun auf den Funktor $\mathrm{Res}(X/S)$ angewandt.

Wir überlassen es dem Vortragenden, möglichst viel zu dem Beweis von [Art69b, Theorem 5.3] zu bringen, so daß immer noch Zeit für eine Beweisskizze der Darstellbarkeit von $\mathrm{Res}(X/S)$ bleibt [Art74, S. 336 Mitte - S. 338]. Auch hier stehen die Organisatoren gerne mit Rat und Tat zur Seite.

Auf alle Fälle erwähnt werden sollte dann noch, daß der Funktor $\mathrm{Res}(X/S)$ im allgemeinen nicht durch ein Schema dargestellt werden kann, und, daß der darstellende algebraische Raum im allgemeinen nicht separiert ist - dies wird beides in der Einleitung zu [Art74] erklärt.

LITERATUR

[Art69a] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publ. Math. IHES 36, 23-58 (1969).

[Art69b] M. Artin, *Algebraization of formal moduli: I*, Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira), Tokyo Press, 21-71 (1969).

[Art73] M. Artin, *Théorèmes de Représentabilité pour les Espaces Algébriques*. Les Presses de l'Université de Montréal (1973).

[Art74] M. Artin, *Algebraic Construction of Brieskorn's Resolutions*, Journal of Algebra 29, 330-348 (1974).

[Schl68] M. Schlessinger, *Functor of Artin Rings*, Transactions of the AMS 130, 208-222 (1968).