Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 11. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl. Seien $B, C \in \mathrm{GL}(n, K)$ invertierbare Matrizen. Zeige, dass für alle $A \in M(n \times n, K)$ die Matrizen CAB und A denselben Rang haben, d.h. $\mathrm{rg}(CAB) = \mathrm{rg}(A)$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $a, b, c, d \in K$, sodass

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, K)$$

invertierbar ist. Berechne das Inverse A^{-1}.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 2$. Sei weiterhin $f : V \longrightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus, d.h. es gibt ein $k \geq 1$ mit $f^{\circ k} = f \circ \cdots \circ f = 0$. Zeige, dass es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V und ein Skalar $a \in K$ gibt, sodass

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der Untervektorraum der von den Vektoren

$$(1,2,1,2), \quad (2,5,4,5), \quad (1,4,6,6), \quad (2,5,6,9), \quad (2,6,7,8), \quad (1,1,0,3)$$

erzeugt wird. Man verwende das Gauß–Verfahren um die Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ zu berechnen und um eine Basis von U anzugeben.

Aufgabe 5. Man verwende das Gauß–Verfahren um den Lösungsraum von folgendem linearen Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu berechnen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Was ist die Dimension dieses Lösungsraumes?

Aufgabe 6. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir für $1 \leq i, j \leq n$ mit $E_{ij} \in M(n \times n, K)$ die Matrix deren (i, j)-te Stelle gleich 1 ist und deren restliche Einträge alle gleich 0 sind. Bezeichne weiterhin $\mathbb{1}_n$ die $n \times n$ Einheitsmatrix und sei $a \in K$ mit $a \neq 0$ gegeben. Man zeige, dass die folgende Matrix A jeweils invertierbar ist, wobei $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ gilt.

(a) Typ 1: $A = \mathbb{1}_n + (a - 1)E_{ii}$;

(b) Typ 2: $A = \mathbb{1}_n + aE_{ij}$;

(c) Typ 3: $A = \mathbb{1}_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ij}$.