Kleine AG
Abelsche Varietäten

am 16.02.2008 in Mainz

Organisatoren:

Henning Hollborn (hollborn@mathematik.uni-mainz.de),
Christian Lehn (clehn@mathematik.uni-mainz.de)

1 Einleitung

Jede eigentliche Gruppenvarietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist eine abelsche Varietät.

Häufig findet man dies als Definition, etwas intuitiver im Fall $k = \mathbb{C}$ ist allerdings der folgende Zugang: Wir starten mit einem n-dimensionalen Vektorraum V und einem Gitter $\Lambda \subseteq V$, d.h. einem freien $\mathbb{Z}$-Modul von maximalem Rang. Der Quotient $T := V/\Lambda$ heißt *komplexer Torus*. Aus Sicht der algebraischen Geometrie stellt sich nun die Frage, in welchen Fällen sich T in den projektiven Raum einbetten lässt. Für eindimensionale komplexe Tori, also elliptische Kurven, ist dies stets möglich; im allgemeinen Fall kann diese Frage durch das Studium von Geradenbündeln beantwortet werden. Diejenigen Tori, die sich als abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ realisieren lassen, nennt man *abelsche Varietäten* über $\mathbb{C}$.

Ziel der Kleinen AG ist es, die Theorie der abelschen Varietäten von Null an zu erlernen. Wir starten zur Motivation mit einer Zusammenfassung der Theorie über den komplexen Zahlen und versuchen anschließend ausführlich, diese – so gut es geht – in die algebraische Situation zu kopieren. Wir werden dabei unter Anderem die Picardgruppe und ihre Beschreibungen, die duale abelsche Varietät und das Poincarebündel studieren. Literaturtechnisch werden wir uns für den ersten Teil an dem Standardwerk [1], für den zweiten Teil an dem Klassiker [6] orientieren. Es soll ungefähr der Inhalt der ersten vier Kapitel aus [1] behandelt werden, allerdings, wo dies möglich ist, nicht über den komplexen Zahlen, sondern über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Abelsche Varietäten sind deswegen so interessante geometrische Objekte, weil man viele Fragen sehr explizit formulieren und beantworten kann. Vieles lässt sich auf lineare Algebra zurückführen, und daneben steht der ganze Apparat der algebraischen Geometrie zur Verfügung. Es böten sich daher diverse spannende Weiterführungen des Themas an: Modulräume abelscher Varietäten und spezielle Untervarietäten, das Schottkyproblem, Endomorphismen abelscher Varietäten, Shimuravarietäten, arithmetische Fragen und vieles mehr. Für dieses Mal wollen wir uns jedoch auf das Erlernen der Grundlagen beschränken.

2 Das Programm

1. Vortrag (45 Min.): Komplexe Tori

Es soll nach [1] vorgegangen und die Definition, die Kohomologie und die Hodgezerlegung eines komplexen Torus erklärt werden. Für die Behandlung von Geradenbündeln benötigen wir Automorphiefaktoren (Anfang von Anhang B). Die erste Chernklasse eines Geradenbündels sollte mit dem Hinweis auf den Zusammenhang zwischen hermiteschen und alternierenden ganzzahligen Formen erläutert werden. Danach sollte der Satz von Appell-Humbert (2.2.3) erklärt und dessen Beweis skizziert werden. Damit können der kanonische Automorphiefaktor eines Geradenbündels eingeführt und einige Eigenschaften von Geradenbündeln (Abschnitt 2.3) hergeleitet werden. (Dabei sollte auf den Beweis von Lemma 2.3.2 eingegangen werden, die weiteren Resultate werden im dritten Vortrag in der allgemeineren Situation bewiesen und können daher hier ohne Beweis angeschrieben werden.) Schließlich noch die Definition einer Thetafunktion zu einem Automorphiefaktor geben (Abschnitt 3.2).
Das Gewicht des Vortrages sollte auf der Beschreibung von Geradenbündeln und der Picardgruppe liegen.

2. Vortrag (45 Min.): Projektive Einbettungen

Der zweite Vortrag soll zunächst einen kurzen Abriss über die Kohomologie von Geradenbündeln auf komplexen Tori geben. Hier sollten definitiv nur die wichtigen Ergebnisse aus Kapitel 3 in [1] einbezogen und diese auch nur referiert werden. Als „wichtig“ darf dabei alles betrachtet werden, was in den Abschnitten 4 bis 6 dieses Kapitels als „Theorem“ bezeichnet wird, zuzüglich Korollar 2.8 und Lemma 6.4. Aus Gründen der Zeitersparnis und besseren Übersicht könnte man sich überlegen, manche der aufgeführten Ergebnisse tabellarisch zusammenzufassen und eventuell nur eine Auswahl vorzustellen.
Danach sollte der duale komplexe Torus (Kap. 2.4 in [1]), insbesondere Prop. 2.4.1, Cor. 2.4.4, Lemma 2.4.5 sowie die Beziehung von $K(L)$ und $\Lambda(L)$ behandelt werden. Danach sollte das Poincarebündel und wenn möglich kurz seine Konstruktion erläutert sowie Lemma 2.5.6 vorgestellt werden.
Hernach kann der Begriff der Polarisierung eingeführt (Kap. 4.1), die Riemannrelationen erläutert (Kap. 4.2) sowie die Charakterisierung ampler Geradenbündel aus Prop. 4.5.2 und die Theoreme 4.5.1 (Lefschetz) und 4.5.4 mit möglichst viel der Beweisideen vorgestellt werden.
Das Gewicht des Vortrages sollte auf diesem letzten Teil, d.h. Kapitel 4 in [1] liegen.

3. Vortrag (45 Min.): Abelsche Varietäten I

Mit diesem Vortrag wollen wir die allgemeine Theorie der abelschen Varietäten über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ beginnen. Wir werden uns bei den folgenden Literaturangaben stets auf [6] beziehen. Zunächst soll die Definition einer abelschen Varietät (Kap. II.4, S. 39) gegeben, das Starrheitslemma („Rigidity Lemma“, S. 43) bewiesen und die anschließenden Korollare 1 und 2 gefolgert werden. Danach das

Theorem im Anhang zu Kap. II.4 (S. 44) anschreibend erwähnen, aber auch nicht mehr dazu.
Nun sollte der Satz von der Wippe („Seesaw Theorem“, Cor. 6 in II.5, S.54) vorgestellt werden. Hierbei sollten die algebraischen Vorbemerkungen der vorangehenden Seiten (etwa S.46 bis S.52, ist aber weniger, als es sich anhört) lediglich kondensiert, jedoch aufgeführt, und das Korollar damit bewiesen werden. Mit dieser Vorbereitung soll der Satz vom Würfel („Theorem of the Cube“ in Kap. II.6, S.55) sowie die darauf folgenden Korollare 1 bis 4 bewiesen werden.

4. Vortrag (45 Min.): Abelsche Varietäten II

Nun können wir die diversen Anwendungen ([6], Application 1 bis 3 auf S. 60 ff. bis einschließlich zur Proposition auf S. 64 oben) des Theorems auf Geradenbündel, Divisibilität und n-Torsionspunkte in voller Länge diskutieren, wobei gegebenenfalls noch fehlende Definitionen der unmittelbar vorangehenden Seiten ergänzt werden müssen. Danach Theorem 4 (S. 72) mit Beweis erläutern und Korollar 1 schlussfolgern.
Als Nächstes widmen wir uns der dualen abelschen Varietät, Kap. II.8, in Charakteristik Null. Die Definition geben (S. 74) und die darauf folgenden Punkte (i) bis (vii) abarbeiten. Das Theorem 1 (S.77) beweisen und die anschließende Diskussion des Poincarebündels (bis S.80) führen.
Falls Zeit bleibt, könnte man anschließend noch auf die duale abelsche Varietät in beliebiger Charakteristik eingehen (Ende von Abschnitt III.13).

5. Vortrag (45 Min.): Beispiele und Ausblick

Das klassische Beispiel einer abelschen Varietät ist die Jacobivarietät einer glatten projektiven Kurve vom Geschlecht g über $\mathbb{C}$, vgl. [1, Abschnitt 11.1]. Neben der Definition und der universellen Eigenschaft (11.4.1) sollten hier die Sätze von Abel-Jacobi und Torelli erwähnt werden.
Anschließend soll ein Ausblick in verschiedene Richtungen gegeben werden, dafür könnte man etwa eine Auswahl der folgenden Punkte ansprechen:

- Modulproblem: Die Siegelsche obere Halbebene parametrisiert die Menge der polarisierten abelschen Varietäten eines gegebenen Polarisationstyps D mit symplektischer Basis ([1, Abschnitt 8.1])

- Zusammenhang zu Hodgestrukturen und Shimuravarietäten: Abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$ sind durch ihre Hodgestruktur auf der ersten Kohomologie eindeutig bestimmt. Diesen Zusammenhang erläutern, etwa nach Milne ([4], Kapitel 6, insbesondere Theorem 6.8).

- arithmetische Fragen: abelsche Varietäten über endlichen Körpern, Zetafunktion einer abelschen Varietät, Zusammenhang zwischen der etalen Kohomologie einer Kurve und der Zetafunktion ihrer Jacobivarietät (kombiniere dafür [2, Rem. 11.2] bzw. [3, Thm. 15.1] mit [5, Cor. 9.6]).

Literatur

[1] C. Birkenhake, H. Lange: *Complex Abelian Varieties*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 302, Springer 1992.

[2] J. S. Milne: *Abelian Varieties*, Vorlesungsskript 1998[1].

[3] J. S. Milne: *Abelian Varieties*, in: G. Cornell, J.H. Silverman (Hg.), *Arithmetic Geometry*, Springer 1986[2].

[4] J. S. Milne: *Introduction to Shimura varieties*, in: J. Arthur, R. Kottwitz (Hg.), *Harmonic Analysis, the Trace Formula and Shimura Varieties*, AMS 2005[3].

[5] J. S. Milne: *Jacobian Varieties*, in: G. Cornell, J.H. Silverman (Hg.), *Arithmetic Geometry*, Springer 1986[4].

[6] D. Mumford: *Abelian Varieties*, Oxford University Press 1970.

[1] verfügbar unter `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/math731.html`
[2] verfügbar unter `http://www.jmilne.org/math/articles/1986b.pdf`
[3] verfügbar unter `http://www.jmilne.org/math/Preprints/svi.pdf`
[4] verfügbar unter `http://www.jmilne.org/math/articles/1986c.pdf`