Programm zum Workshop
Anstiegsfiltrationen
am 23.7.05 in Bonn

In diesem Workshop soll es um Anstiegsfiltrationen von Frobenius-Moduln über dem Robba-Ring gehen. Dies hat Anwendungen auf die "Monodromie p-adischer Differentialgleichungen".

Komplexe Motivation (siehe auch Einleitung von [Ke2]): Sei X ein komplex analytischer Raum. Dann ist ein holomorphes Vektorbündel $\mathcal{M}$ auf X zusammen mit einem integrablen Zusammenhang $\nabla\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \Omega^1_X$ nichts anderes (nach der Wahl einer Basis des komplexen Vektorraums $V := \mathrm{Ker}(\nabla)$) als ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (siehe z.B. [De], I §3). Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ operiert auf V (loc. cit., I §2), d.h. man hat eine Darstellung $\rho\colon \pi_1(X) \to GL(V)$. Ist X das Komplement eines Divisors D mit normalen Überkreuzungen in einer glatten eigentlichen Varietät $\bar{X}$, so heißt die Einschränkung von ρ auf die Untergruppe von $\pi_1(X)$, welche durch einen Weg um D erzeugt wird, die lokale Monodromie-Darstellung assoziiert zu D. Sie misst, wie singulär sich die Differentialgleichung in D verhält.

Ist das lokale System (V, ρ) algebraisch-geometrischen Ursprungs, d.h. die i-te relative Betti-Kohomologie eines glatten, eigentlichen Morphismus nach X, so ist die zu einer irreduziblen Komponente von D assoziierte lokale Monodromie-Darstellung quasiunipotent, d.h. das Bild der Einschränkung auf eine Untergruppe von endlichem Index ist unipotent.

Wir werden in diesem Workshop ein p-adisches Analogon für "X klein, glatt und 1-dimensional" betrachten (im Komplexen bedeutet dies, dass wir $X = D^*$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ohne den Nullpunkt nehmen): Sei E ein Körper der Charakteristik 0, der vollständig bezüglich eines nicht archimedischen diskreten Absolutbetrages $|\cdot|\colon E^\times \to \mathbb{R}^\times$ ist. Wir normalisieren $|\cdot|$ so, dass $|p| = p^{-1}$. Sei $\mathfrak{o}_E \subset E$ der assoziierte Bewertungsring, sei $\mathfrak{m}_E$ sein maximales Ideal, und sei $K_0 = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{m}_E$ der Restklassenkörper. Wir nehmen an, dass K_0 ein perfekter Körper der Charakteristik $p > 0$ ist[1]. Der Robba-Ring $\mathcal{R} = \mathcal{R}_E$ ist per definitionem der Ring der formalen Laurent-Reihen $f(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i t^i$ mit $c_i \in E$, so dass $f(x)$ konvergiert für alle $x \in E$ mit $r < |x| < 1$, wobei $0 < r < 1$ eine reelle Zahl abhängig von f ist. Mit anderen Worten, $\mathcal{R}$ ist der induktive Limes für $r \to 1$ der Ringe $\mathcal{R}_r$ der formalen Laurent-Reihen, die auf dem Kreisring $\{\, x \in E \mid r < |x| < 1 \,\}$ konvergieren.

Es sei $\Omega^1_{\mathcal{R}}$ der freie $\mathcal{R}$-Modul vom Rang 1 mit Basis dt/t. Ein $\mathcal{R}$-Modul M mit einem Zusammenhang $\nabla\colon M \to M \otimes \Omega^1_{\mathcal{R}}$ kann man daher als p-adische Differentialgleichung auf einem infinitesimal dünnen Kreisring auffassen[2]. Dies ist das oben angesprochene p-adische Analogon.

Was bedeutet es nun, "algebraisch geometrischen Ursprungs" zu sein? Dazu wählen wir auf $\mathcal{R}$ eine Liftung σ des Frobenius zur Potenz $q = p^a$.

[1] Für viele der folgenden Aussagen ist es möglich, diese Voraussetzungen abzuschwächen.
[2] Da $\Omega^2_{\mathcal{R}} = 0$, ist ∇ automatisch integrabel.

Dieser existiert auf $\mathcal{R}$ (z.B. $\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i t^i \mapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sigma(c_i) t^{qi}$, wobei $\sigma\colon E \to E$ eine Liftung des üblichen Frobenius $x \mapsto x^q$ auf K_0 ist), aber er existiert nicht auf $\mathcal{R}_r$, da sich nach Anwenden von σ der Kreisring, in dem die formale Laurent-Reihe konvergiert, im Allgemeinen verkleinert. Algebraisch geometrischen Ursprungs zu sein bedeutet dann für uns, dass das Paar (M, ∇) zusätzlich einen nicht ausgearteten σ-linearen Endomorphismus Φ besitzt. Der Grund dafür ist der folgende: Sei $\bar{X}$ eine glatte affine Kurve über K_0, sei $a \in \bar{X}$ ein abgeschlossener Punkt, und sei $X = \bar{X} \setminus \{a\}$. Dann liefert ein um a überkonvergenter F-Isokristall auf X genau solch ein Tripel (M, ∇, Φ) (siehe [Cr2]). Andrerseits spielt die Kategorie der überkonvergenten F-Isokristalle gerade die Rolle der Koeffizientenkategorie für die rigide Kohomologie ([Be]).

Die Theorie der überkonvergenten F-Isokristalle existiert nicht nur für Kurven, sondern in sehr viel größerer Allgemeinheit. Ein instruktives Beispiel ist insbesondere der Fall $X = \mathrm{Spec}(K_0)$. In diesem Fall ist ein überkonvergenter F-Isokristall nichts anderes als ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Quotientenkörper des Wittrings von K_0 zusammen mit einem bijektiven σ-linearen Operator, also ein gewöhnlicher F-Isokristall.

Das Analogon zur Quasi-Unipotenz der Monodromie in Komplexen ist nun, dass die lokale Monodromie-Darstellung für solche (M, ∇), so dass eine Frobenius-Struktur Φ existiert, quasiunpotent ist, d.h. die Einschränkung ihrer Verhalbeinfachung auf die Trägheitsgruppe hat endliches Bild (siehe [Ke4], 4.6 und 4.7, oder auch [Ke3], 7.2, für eine präzise Umformulierung dieser Bedingung).

Wir wollen in diesem Workshop ein Paar Elemente des Beweises dieses Satzes studieren. Dabei folgen wir den Arbeiten von Kedlaya. Die grobe Idee ist die folgende:

1. Schritt: Man vergisst erst einmal den Zusammenhang und studiert nur das Paar (M, Φ). Von diesem zeigt man, dass M eine kanonische Φ-invariante Filtration besitzt, so dass jeder sukzessiver Quotient isoklin ist (d.h. all seine Anstiege sind gleich). Auf diesem isoklinen Quotienten kann man dann Φ modifizieren (im Wesentlichen ersetzt man Φ durch $p^r \Phi^s$ für r, s passend gewählt), so dass Φ auf diesem Quotienten dann Anstieg Null hat. Da die Filtration "hinreichend kanonisch" ist, ist sie verträglich mit jedem mit Φ kompatiblen Zusammenhang ∇ und daher genügt es den Monodromie-Satz in dem Fall zu beweisen, dass alle Anstiege gleich Null, also für sogenannte Einheitswurzel-(σ, ∇)-Moduln.

Diese Anstiegsfiltration existiert natürlich auch im Fall eines überkonvergenten F-Isokristalls über $\mathrm{Spec}(K_0)$, also im Fall eines gewöhnlichen F-Isokristalls. Dann ist dies nichts anderes als die isotypische Zerlegung nach den Anstiegen.

2. Schritt: Man beweist den Monodromie-Satz für Einheitswurzel-(σ, ∇)-Moduln. Dies ist von Tsuzuki in [Ts] gemacht worden.

Der Workshop wird sich hauptsächlich mit Schritt 1 befassen.

1. Vortrag: Überkonvergente F-Isokristalle (45 Minuten)

Dies soll ein motivierender Vortrag sein, in dem einige der oben angesprochenen Konstruktionen präzisiert werden. Der Vortrag hat das Ziel zu skizzieren, was ein überkonvergenter F-Isokristall bezüglich eines Paares $(X, \bar{X})$ ist, wobei $\bar{X}$ eine affine glatte K_0-Varietät der Dimension ≤ 1 und $X = \bar{X} \setminus D$, wobei D aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten besteht. Für uns sind besonders interessant der Fall $X = \bar{X} = \mathrm{Spec}(K_0)$ (um den Zusammenhang mit üblichen F-Isokristallen zu sehen) und der Fall, dass D nur aus einem Punkt besteht. In diesem zweiten Fall sollte kurz erklärt werden, dass man einen Modul mit Zusammenhang und Frobenius-Struktur über dem Robba-Ring erhält.

Auf Eigenschaften des Robba-Rings soll in diesem Vortrag nicht eingegangen werden. Dies ist Inhalt von Vortrag 3.

Literatur: [Cr2], [Cr1], [Ts], [Be] (in großer Allgemeinheit)

2. Vortrag: Der null-dimensionale Fall (30 Minuten)

In diesem kurzen Vortrag soll der Fall eines F-Isokristalls assoziiert zu $X = \mathrm{Spec}(K_0)$ betrachtet werden. Genauer sei K_0 ein perfekter Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei Γ ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper K_0, dessen Quotientenkörper $E = \Gamma[1/p]$ von Charakteristik 0 ist[3]. Sei $\sigma\colon \Gamma \to \Gamma$ ein $\mathbb{Z}_p$-linearer Ring-Endomorphismus, der den Frobenius $x \mapsto x^q$ ($q = p^a$ für ein $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) auf K_0 liftet (dann ist σ bijektiv). Ein *F-Isokristall über K_0 (bezüglich Γ)* ist dann ein endlich-dimensionaler $\Gamma[1/p]$-Vektorraum M zusammen mit einer σ-linearen bijektiven Abbildung $\Phi\colon M \to M$. Ein solcher F-Isokristall (M, Φ) heißt *isoklin vom Anstieg* $\lambda \in \mathbb{Q}$, falls ganze Zahlen r, s mit $\lambda = r/s$ und ein Γ-Gitter Λ von M existieren, so dass $\Phi^s(\Lambda) = \pi^r \Lambda$. Dabei ist π ein uniformisierendes Element von Γ. Das Ziel des Vortrags ist es, eine Skizze des Beweises des folgenden Satzes zu geben:

Satz: *Für jeden F-Isokristall (M, Φ) über K_0 existiert eine eindeutige Zerlegung $(M, \Phi) = \bigoplus_{i=1,\dots,r}(M_i, \Phi_i)$ von F-Isokristallen, so dass die (M_i, Φ_i) alle isoklin von paarweise verschiedenem Anstieg sind.*

Für den Fall, dass K_0 algebraisch abgeschlossen ist, sollte außerdem noch die Aussage gebracht werden, dass die Kategorie der F-Isokristalle über K_0 halbeinfach ist, und die einfachen Objekte sollten angegeben werden (aus Zeitgründen ohne Beweis).

Literatur[4]: [Zi] VI, §3 (empfohlen), [Dem] IV, [Ma], [Ke1].

[3] Diese eher unkonventionellen Notationen sind so gewählt, dass sie mit denen der nächsten Vorträge kompatibel sind.

[4] Häufig nur für den Fall $R = W(K_0)$; die Beweise lassen sich aber ohne Schwierigkeiten verallgemeinern (man ersetze p durch π)

3. Vortrag: Analytische Ringe (50 Minuten)

Von nun an orientieren wir uns an dem Manuskript [Ke3]. Dazu sollen erst einmal die folgenden Notationen eingeführt werden, die für den Rest des Workshops Gültigkeit haben: Sei K_0 ein Körper der Charakteristik p, sei K eine Körper-Erweiterung von K_0, die vollständig bezüglich einer Bewertung v_K ist, so dass v_K auf K_0 trivial ist. Der Fall "v_K trivial" (z.B. $K = K_0$) ist zugelassen! Man sollte hierbei an den Fall denken, dass K die Komplettierung des Funktionenkörper einer Kurve über K_0 an einem abgeschlossenen Punkt ist. Insbesondere wollen wir nicht voraussetzen, dass K selbst perfekt ist. Wir wählen Cohen-Ringe (Definition!) C_{K_0} und C_K von K_0 bzw. K und eine Einbettung $C_{K_0} \to C_K$. Schließlich sei $\mathcal{O}$ eine rein verzweigte Erweiterung von C_{K_0}.

Das Ziel des Vortrags ist es, die Ringe $\Gamma^K_{\mathrm{an,r}}$ und $\Gamma^K_{\mathrm{an,con}}$ zu definieren ([Ke3], 2.4.8) und etwas zu den Beweisen der folgenden Resultate von [Ke3] zu sagen: 2.4.10, 2.4.11, 2.9.6 (mit einer kurzen Einführung in die Eigenschaften von Moduln über einem Bezout-Ring, wie in 2.9.5), Vektorbündel über $\Gamma_{\mathrm{an,r}}$ (2.8, insbesondere 2.8.4).

Außerdem wäre es schön, die Beziehungen zum Robba-Ring herzustellen und vielleicht auch kurz auf den Spezialfall "v_K trivial" (oder auch nur $K = K_0$) einzugehen.

4. Vortrag: Harder-Narasimhan-Filtration und die Dieudonné-Manin-Zerlegung (60 Minuten)

Hier sollen σ-Moduln über $\Gamma^K_{\mathrm{an,con}}$ und ihr Grad und Anstieg definiert werden ([Ke3] 3.4.1). Man erhält die üblichen Begriffe von Semistabilität, Stabilität und Harder-Narasimhan-Filtration (loc. cit., 3.4 und 3.5).

Im zweiten Teil des Vortrags geht es dann um die Dieudonné-Manin-Zerlegung von σ-Moduln über $\mathcal{R} = \Gamma^{K^{\mathrm{alg}}}_{\mathrm{an,con}}$, wobei K^{alg} die Komplettierung eines algebraischen Abschlusses von K ist. Das Ziel ist Theorem 4.5.7 von [Ke3], seine Korollare 4.5.10 und 4.5.12 und Proposition 4.5.14.

5. Vortrag: Anstiegsfiltration (70 Minuten)

In diesem Vortrag geht es dann um die Definition der speziellen und der generischen Anstiegsfiltrationen und ihren Beziehungen zur Harder-Narasimhan-Filtration. Das Ziel ist Theorem 6.4.1 von [Ke3]. Es wäre schön ,wenn der Vortragende ein wenig detaillierter auf den Vergleich von generischem und speziellen Newton-Polygon eingehen könnte. Auf Descent-Theorie kann wahrscheinlich aus Zeitgründen nur kurz eingegangen werden, aber vielleicht bleibt trotzdem Zeit etwas zu Theorem 6.3.3 und Proposition 6.3.5 zu sagen.

Als Abschluss des Vortrags sollte dann noch kurz erwähnt werden (je nach Zeit und Geschmack des Vortragenden mehr oder weniger ausführlich), dass dann aus der Existenz der Anstiegsfiltration und aus dem Spezialfall "Anstieg 0" dann der p-adische lokale Monodromie-Satz folgt (loc. cit., Theorem 7.2.5).

References

[Be] P. Berthelot: *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, Prépublication IRMAR 96-03, 89 pages (1996), http://name.math.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/

[Cr1] R. Crew: *F-Isocrystals and p-adic representations*, Proc. Sympos. Pure Math. **46**, Part 2, Algebraic geometry, Bowdoin (1985), 111–138.

[Cr2] R. Crew: *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, Ann. Sci. ENS **31**, 6 (1998), 717–763.

[De] P. Deligne: *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics **163** (1970), Springer-Verlag.

[Dem] M. Demazure: *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Mathematics **302**, Springer-Verlag (1972).

[Ke1] K. Kedlaya: *Frobenius slope filtrations and Crew's conjecture*, notes from the workshop "Current trends in arithmetic geometry and number theory" at the Banff International Research Station, August 17-21, 2003, http://www-math.mit.edu/ kedlaya/papers/

[Ke2] K. Kedlaya: *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals I: Unipotence and logarithmic extensions*, preprint version 2005, January 9, arXiv math.NT/0405069.

[Ke3] K. Kedlaya: *Slope filtrations revisited*, preprint version 2005, April 10, arXiv:math.NT/0504204.

[Ke4] K. Kedlaya: *Local monodromy of p-adic differential equations: an overview*, preprint version 2005, May 22, arXiv:math.NT/0501361.

[Ma] Y. Manin: *Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic*, Russian Mathematical Surveys **18** (1963), 1–80.

[Ts] N. Tsuzuki: *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-crystals on a curve*, Amer. J. Math. **120** (1998), 1165–1190.

[Zi] T. Zink: *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*, Teubner-Texte zur Mathematik **68** (1984).