**Programm zum Workshop**
**Reduktion abelscher Varietäten**
**am 6.5.06 in Essen**

In diesem Workshop soll es um die Reduktion abelscher Varietäten gehen. Um dies zu präzisieren, erst einmal ein paar Notationen, die fr den gesamten Workshop gelten sollen:

Sei $R$ ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $K$ und Restklassenkörper $k$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $k$ perfekt ist. Es sei $p$ der charakteristische Exponent von $k$, d.h. $p = \mathrm{char}(k)$ falls $\mathrm{char}(k) > 0$, und $p = 1$ falls $\mathrm{char}(k) = 0$. Sei $A_K$ eine abelsche Varietät über $K$. Für jedes $R$-Schema $X$ setzen wir $X_K := X \otimes_R K$ und $X_0 := X \otimes_R k$. Beim letzten Workshop haben wir die folgende Aussage gesehen:

**Theorem 0**: *Der Funktor $X \mapsto \mathrm{Hom}_K(X_K, A_K)$ auf der Kategorie der glatten $R$-Schemata $X$ mit zusammenhängenden Fasern ist darstellbar durch ein quasiprojektives glattes $R$-Gruppenschema $G$, so dass $G_K = A_K$.*

Man nennt $G$ auch die Eins-Komponente des Néron-Modells von $A_K$ (das Néron-Modell stellt den auf dieselbe Weise definierten Funktor auf der Kategorie aller glatten $R$-Schemata dar). Wir werden in diesem Workshop Theorem 0 als "Black Box" voraussetzen. Darüber hinaus werden die Methoden und Resultate aus dem letzten Workshop nicht benutzt.

Die spezielle Faser $G_0$ ist eine kommutative algebraische Gruppe über $k$ und besitzt daher eine eindeutige Folge von abgeschlossenen Untergruppenschemata

$$T_0 \subset L_0 \subset G_0,$$

so dass gilt: $G_0/L_0$ ist eine abelsche Varietät, $L_0$ ist ein affines glattes $k$-Gruppenschema, $L_0/T_0$ ist unipotent, und $T_0$ ist ein Torus.
Man sagt, $A_K$ *hat abelsche Reduktion* (bzw. *hat semiabelsche Reduktion*), wenn $L_0 = 1$, d.h. $G_0$ ist eine abelsche Varietät, (bzw. wenn $T_0 = L_0$, d.h. $G_0$ ist eine Erweiterung einer abelschen Varietät durch einen Torus).
Eines der Hauptresultate des Workshops wird sein:

**Theorem 1**: *Jede abelsche Varietät besitzt potentiell semiabelsche Reduktion, d.h. es existiert eine endliche separable Körpererweiterung $K'$ von $K$, so dass $A_K \otimes_K K'$ semiabelsche Reduktion über dem ganzen Abschluss von $R$ in $K'$ besitzt.*

Des weiteren werden wir uns mit der Frage beschäftigen, welche kohomologischen Kriterien für abelsche bzw. semiabelsche Reduktion existieren. Genauer bedeutet dies:

Sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von $K$, sei $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Es sei $I \subset \Gamma$ die Trägheitsgruppe. Es sei eine zu $p$ teilerfremde Primzahl $\ell$ fixiert, und für jede ganze Zahl $n > 0$ sei $A_K[\ell^n]$ der Kern der Multiplikation mit $\ell^n$ auf $A_K$. Dann ist $A_K[\ell^n]$ ein endliches étales $K$-Gruppenschema, so dass $A_K[\ell^n](\bar{K}) \cong (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{2\dim(A_K)}$. Es sei $T_\ell(A_K)$ der $\ell$-adische Tatemodul, d.h.

$$T_\ell(A_K) = \varprojlim_n A_K[\ell^n](\bar{K}).$$

Dies ist dann ein freier $\mathbb{Z}_\ell$-Modul vom Rang $2\dim(A_K)$, auf dem $\Gamma$ auf kanonische Weise stetig und linear operiert. Sei diese Operation durch

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(T_\ell(A_K))$$

gegeben.
Im Workshop sollen die beiden folgenden kohomologischen Kriterien gezeigt werden:

**Theorem 2** (Kriterium von Néron-Ogg-Shafarevich): *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(1) *$A_K$ besitzt abelsche Reduktion.*
(2) *$I$ operiert trivial auf $T_\ell(A_K)$.*

**Theorem 3**: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(1) *$A_K$ besitzt semiabelsche Reduktion.*
(2) *Für alle $g \in I$ gilt $(\rho(g) - \mathrm{id}_{T_{ell}(A_K)})^2 = 0$.*

Die Beweise von Theorem 2 und Theorem 3 folgen durch eine Analyse der $\ell^n$-Torsion von $G$. Dies sind die Vorträge 1 bis 3. Der Beweis von Theorem 1 ist etwas technischer und geschieht mittels des allgemeinen Monodromietheorems für die étale Kohomologie, das im 4. Vortrag vorgestellt und durch Reduktion auf ein elementares Argument über Homomorphismen $I \to GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$ bewiesen wird. Im letzten Vortrag soll dann Delignes Beweis von Theorem 1 vorgestellt werden. Die Reduktion auf ein elementares Argument im 4. Vortrag und Delignes Beweis im 5. Vortrag beruhen im allgemeinen Fall auf Néron-Desingularisierung. Auf eine Variante davon wurde bereits beim letzten Workshop eingegangen, und wir benutzen sie nur als "Black Box".

**Notation**: Im Workshop benutzen wir die obigen Notationen, insbesondere ist $R$ ein diskreter Bewertungsring mir perfekten Restklassenkörper $k$. Der Einfachheit halber setzen wir für den ganzen Workshop voraus, dass $R$ henselsch ist, d.h. für jedes glatte $R$-Schema $X$ ist die kanonische Abbildung $X(R) \to X(k)$ surjektiv (dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $R$ vollständig ist).

**1. Vortrag: Tate-Moduln kommutativer Gruppenschemata**
(30 Minuten)

Die folgenden Punkte sollten in diesem Vortrag behandelt werden:

(1) Wiederholung von Theorem 0.
(2) Der Satz, dass jede kommutative algebraische Gruppe $G_0$ über einem perfekten Körper $k$ eine eindeutige Filtration wie in der Einleitung beschrieben besitzt ([Ro] and [SGA3] Exp. XVII, 7.2.1, statt [Ro] gibt es auch einen Beweis in moderner Sprache von B. Conrad [Co]). In jedem Fall sollte kurz noch einmal erklärt werden, was eine unipotente Gruppe und was ein Torus ist. Zum Beweis des Satzes soll nichts gesagt werden.
(3) Die $\ell^n$-Torsion und der $\ell$-adische Tate-Modul eines kommutativen Gruppenschemas über $k$ für $(\ell, p) = 1$ ([SGA7] Exp. IX, 2.1, insbesondere sollen die Identitäten 2.1.10 und 2.1.11 erklärt werden, 2.1.13 und 2.1.14 sollen nicht gemacht werden).

**2. Vortrag: Das Kriterium von Neron-Ogg-Shafarevich**
(60 Minuten)

In diesem Vortrag geht es um das Galois-Kriterium für abelsche Reduktion. Die folgenden Punkte sollten behandelt werden:

(1) Erinnerung an die Struktur der Galoisgruppe $\Gamma$: Trägheitsgruppe $I$, maximale pro-$p$-Gruppe $P$ von $I$ und Struktur des Quotienten $I/P$ (siehe z.B. [Ill] erster Absatz von 1.1).
(2) Die $\ell^n$-Torsion der Eins-Komponente $G$ des Néron-Modells von $A_K$, der endliche Teil des Tate-Moduls $T_\ell(G)^f$ und seine Identifikation mit den Invarianten unter der Trägheitsgruppe ([SGA7] Exp. IX, 2.2.1 – 2.2.5, alles für $\ell \neq p$).
(3) Isogene abelsche Varietäten haben dasselbe Reduktionsverhalten ([SGA7] Exp. IX, 2.2.6 und 2.2.7).
(4) Das Kriterium von Neron-Ogg-Shafarevich ([SGA7] Exp. IX, 2.2.9, um die Zuhörer nicht zu ermüden, ist es vielleicht gut, nur die Punkte (ii$^0$), (iii$^0$) und (v) von 2.2.9 anzugeben).

**3. Vortrag: Das Galois-Kriterium für semiabelsche Reduktion**
(60 Minuten)

Der entscheidende Schritt, um das Galois-Kriterium für semiabelsche Reduktion zu beweisen, ist das Orthogonalitätstheorem, das den Formalismus der Bi-Extensionen verwendet. Dazu wird im Workshop leider keine Zeit sein, so dass wir das Orthogonalitätstheorem leider als "Black Box" verwenden müssen.

(1) Kurze Erinnerung an die Definition der dualen abelschen Varietät $A_K^\vee$ als $\mathrm{Pic}^0(A_K/K)$ (z.B. [CF] Definition 1.4(c), siehe auch [BLR] 8.1).

(2) Die perfekte $\Gamma$-äquivariante Paarung $e_\ell\colon T_\ell(A_K) \times T_\ell(A_K^\vee) \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ (z.B. [Mi] 16, siehe auch [Mi] 11). Diese Paarung ist in [SGA7] $\varphi$ genannt. Jede Polarisierung $\xi$ von $A_K$ definiert dann eine alternierende nicht ausgeartete Paarung $e_\ell^\xi\colon T_\ell(A_K) \times T_\ell(A_K) \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ (loc. cit.).
(3) Definition des torischen Teils des Tate-Moduls ([SGA7] Exp. IX, 2.3).
(4) Orthogonalitäts-Theorem für $e_\ell$ ([SGA7] Exp. IX, 2.4, ohne Beweis) und für $e_\ell^\xi$ (loc. cit. 2.5).
(5) Das Galois-Kriterium für semistabile Reduktion ([SGA7] Exp. IX, 3.5).

**4. Vortrag: Das Monodromietheorem** (50 Minuten)

Das Hauptresultat dieses Vortrags ist der Satz, dass die Trägheitsgruppe auf der étalen Kohomologie quasiunipotent operiert. Dies kann durch ein elementares Argument bewiesen werden, wenn $k$ von endlichem Typ über dem Primkörper ist. Für den allgemeinen Fall benutzt man dann Néron's Desingularisierungssatz, der in etwas anderer Gestalt schon beim letzten Workshop eine wichtige Rolle gespielt hat. Hier soll die allgemeine Version (bewiesen von Popescu) nur kurz angegeben werden. Zum Beweis kann leider nichts gesagt werden.
(1) Kurze Erinnerung an die $\ell$-adische Kohomologie (im Stil der Punkte a), b) und c) von [SGA7] Exp. I, 0.1, die Endlichkeitsaussagen (0.1.2), (0.1.3) und (0.1.5)). Um die $\ell$-adische Kohomologie mit dem Tate-Modul in Verbindung zu bringen, benötigen wir den kanonischen Isomorphismus $H^1_{\mathrm{et}}(A_K, \mathbb{Z}_\ell) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A_K), \mathbb{Z}_\ell)$ (ohne Beweis, [Mi] Theorem 15.1).
(2) Die "Lineare-Algebra-Version" des Monodromiesatzes ([SGA7], Exp. IX, 1.1, mit Beweis (siehe [ST], Appendix)). Bemerkung, dass $(*_\ell)$ erfüllt ist, wenn $k$ von endlichem Typ über $\mathbb{F}_p$ bzw. $\mathbb{Q}$ ist.
(3) Néron's Desingularisierungs-Theorem: Sei $\sigma\colon A \to B$ ein regulärer Homomorphismus von noetherschen Ringen (d.h. $\sigma$ ist flach und alle Fasern von $\mathrm{Spec}(\sigma)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ sind geometrisch regulär). Dann ist $B$ ein filtrierter induktiver Limes von glatten $A$-Algebren (siehe z.B. [Sp], ohne Beweis). Anwendung auf den Spezialfall, dass $A$ und $B$ diskrete Bewertungsringe sind (vgl. [SGA7] Exp. I, 0.5.1).
(4) Der Mondromie-Satz ([SGA7] Exp. I, Variante 1.3, mit Beweis).

**5. Vortrag: Theorem der semiabelschen Reduktion** (50 Minuten)

In diesem Vortrag soll Theorem 1 aus der Einleitung bewiesen werden ([SGA7] Exp. I, Appendice). Es wäre schön, wenn der Vortragende etwas zur algebraischen Fundamentalgruppe und zur Theorie der Gewichte sagen könnte (daher ist die Zeit auch eher reichlich bemessen).

## References


[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud: *Néron models*, Springer 1990.

[CF] C.-L. Chai, G. Faltings: *Degeneration of Abelian Varieties*, Springer 1990.

[Co] B. Conrad: *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*, www.math.lsa.umich.edu/ bdconrad/

[Ill] L. Illusie: *Autour de théorème de monodromie local*, Exposé I in: *Périodes p-adiques*, Asterisque **223**.

[Mi] J.S. Milne: *Abelian varieties*, in: G. Cornell, J. Silverman (Ed.): *Arithemtic Geometry*, Springer 1986.

[Ro] M. Rosenlicht: *Some basic theorems of algebraic groups*, American Journal of Mathematics **78** (1956), 401-443.

[SGA3] A. Grothendieck et al.: *Schémas en groupes*, LNM **151**, **152**, **153**, Springer (1970).

[SGA7] A. Grothendieck, M. Raynaud, et. al.: *Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie, Groupes de Monodromie en Géometrie Algébrique* (1967–68), LNM **288**, **340**, Springer (1972–73).

[Sp] M. Spivakovsky: *A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 381-444.

[ST] J.P. Serre, J. Tate: *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. **88** (1968), 492-517.