Kleine AG
Spiegelsymmetrie von Calabi-Yau 3-Mannigfaltigkeiten

am Samstag, den 21. Oktober 2006 in Bonn

Organisatoren: Meng Chen (mchen@math.uni-bonn.de), Sven Meinhardt (sven@math.uni-bonn.de), Ulrich Schlickewei (uli@math.uni-bonn.de)

1 Einleitung

In dieser kleinen AG wollen wir die Spiegelsymmetrie von Calabi-Yau 3-Mannigfaltigkeiten verstehen. Vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet ist Spiegelsymmetrie eine Symmetrie zwischen $N = 2$ superkonformen Feldtheorien, die im Rahmen der Stringtheorie auftreten. Nach Meinung der Physiker kann man jeder Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit eine solche $N = 2$ superkonforme Feldtheorie zuordnen. Wenn man die Spiegelsymmetrie zwischen den Feldtheorien zweier Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten X und Y geometrisch interpretiert, ergibt sich ein unerwarteter, bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den komplexen Strukturen der einen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit X und den symplektischen Strukturen der anderen Y. Grob gesprochen gibt es eine lokale Bijektion zwischen dem komplexen Modulraum von X und dem Kählermodulraum von Y. Bei dieser lokalen Identifikation werden gewisse Zusatzstrukturen auf den Modulräumen, die sogenannten Yukawa-Kopplungen, miteinander identifiziert. Diese Yukawa-Kopplungen kann man der Einfachheit halber als Multilinearformen auf den Tangentialbndeln der Modulräume auffassen. Im Falle des komplexen Modulraumes werden diese Formen durch die Variation der Hodgestruktur von X beschrieben. Auf der symplektischen Seite verallgemeinert die Yukawa-Kopplung das Schnittprodukt von Divisoren mittels Gromov-Witten Invarianten. Diese Invarianten werden aus der Anzahl der "rationalen" Kurven in Y bestimmt. Somit bietet die Spiegelsymmetrie ein Verfahren, die Anzahl der rationalen Kurven in Y durch Auswertung der Variation der Hodgestrukturen auf X zu bestimmen.

2 Programm

1. Vortrag (45 Minuten): Ein kleiner Überblick

Der erste Vortrag ist ein reiner Überblicksvortrag ohne Propositionen, Lemmata oder Theoreme. Hier soll der Weg von der sehr einfachen Spiegelsymmetrie für

$N = 2$ superkonforme Feldtheorien hin zu der sehr komplexen Spiegelsymmetrie für Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten aufgezeigt werden. Wir orientieren uns dabei an dem ersten Abschnit aus [4], der eigentlich alle notwendigen Informationen enthält. Tatsächlich wollen wir uns auf die ersten 7 Seiten beschränken und den Rest über Kontsevich's Homologische Spiegelsymmetrie aus Zeitgründen weglassen. Die Schwierigkeit dieses Vortrages besteht darin, gerade soviel Material zu präsentieren, dass

1. genügend viele Informationen vorhanden sind, um die (vermuteten) Zusammenhänge zu verstehen, und

2. der Zuhörer nicht durch zu viele Informationen erschlagen wird.

Es kommt also auf das richtige Augenmaß an. Für detailliertere Informationen kann man einen Blick in die Arbeit [3] werfen.

2. Vortrag (60 Minuten): Der komplexifizierte symplektische Modulraum und die (1,1)-Yukawa-Kopplung

Dieser Vortrag folgt dem Kapitel 15 in [2]. Unter einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit verstehen wir eine kompakte Kählermannigfaltigkeit X mit trivialem kanonischen Bündel und $H^0(X, \Omega^i_X) = 0$ für $0 < i < n$. Es sollten der komplexifizierte Kählermodulraum und seine Varianten durch Wahl eines Rahmens eingefürt werden (siehe [2, 15.1]).
Anschließend ist ein Ausflug in die Theorie der pseudoholomorphen Kurven nötig. Es geht uns hierbei darum, rationale Kurven auf $X = (N, I)$ zu zählen. Um hier eine für die Spiegelsymmetrie brauchbare Invariante zu erhalten, muss man Deformationen der komplexen Struktur I zu generischen fast-komplexen Strukturen J zulassen. Man könnte hier die beiden Beispiele in [2, 15.2] kurz ansprechen, anhand derer gezeigt wird, dass es in bestimmten Fällen unerlässlich ist, zu fast-komplexen Strukturen überzugehen, die nicht integrabel sind. Wichtig ist für uns am Ende das Resultat, dass wir die Zahl

$$\sharp\overline{M(\eta, J, \mathbb{P}^1)/\mathrm{PGL}(2)}$$

unabhängig von J als Invariante für X nach Wahl einer Kählerform ω definieren können. Um hier eine Zahl zu erhalten, müssen wir uns von hier an auf $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 3$ einschränken. In guten Fällen kann man diese Invariante als die Anzahl der rationalen Kurven auf (N, J) interpretieren, die die Homologieklasse $\eta \in H_2(N, \mathbb{Z})$ darstellen. Dies ist sehr technisch und sollte wie in [2, 15.2] grob skizziert werden.
Schließlich sollte die $(1, 1)$-Yukawa-Kopplung erklärt werden. Mit der obigen Vorarbeit ist das nicht mehr sehr schwierig. Zuerst müssen die Gromov-Witten-Invarianten $\Phi_\eta(D_1, D_2, D_3)$ für $D_i \in H^2(X, \mathbb{C})$, $\eta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ definiert werden. Die Yukawa-Kupplung ist dann die Zuordnung einer formalen Potenzreihe zu einem Tripel (D_1, D_2, D_3). Siehe hierzu [2, 15.3].
Einen detaillieren Zugang zu diesem Thema findet man in [5] Lecture 2 bis 5.

3. Vortrag (45 Minuten): Variation von Hodge-Strukturen

Wir wollen hier zunächst die Variation von Hodge-Strukturen untersuchen, die von einer Familie von kompakten Kählermannigfaltigkeiten induziert wird. Sei also $f : \mathcal{X} \to S$ ein glatter, eigentlicher Morphismus einer Kählermannigfaltigkeit $\mathcal{X}$ auf eine komplexe Mannigfaltigkeit S. Nach dem Satz von Ehresmann ([1, Thm. 4.1.2]) erhalten wir zu einer solchen Familie lokale Systeme $R^i f_* \underline{\mathbb{C}}_{\mathcal{X}}$ auf S. Man wiederhole kurz den Zusammenhang zwischen lokalen Systemen und flachen Vektorbündeln und den Begriff der Monodromiedarstellung. Falls Zeit ist, kann man das schöne Beispiel 16.3 in [2] bringen. Nun sollte man die von der Hodgefiltrierung auf den Fasern induzierten holomorphen Unterbündel $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{H}^i := R^i f_* \underline{\mathbb{C}}_{\mathcal{X}}$ einführen. Die Griffiths-Transversalität ([2, Thm. 16.4]) sollte wenigstens zitiert werden. Nach dieser Motivation kann man schnell die Definition einer abstrakten Variation von Hodge-Strukturen geben.
An dieser Stelle führe man die Periodenabbildung ein, die einer Variation von Hodgestrukturen zugeordnet wird und skizziere den lokalen Torellisatz für Calabi-Yau 3-Mannigfaltigkeiten ([2, Thm. 16.9]).
Sei nun $f : \mathcal{X} \to S$ eine Familie von Calabi-Yau 3-Mannigfaltigkeiten, sei $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{X}} \to \tilde{S}$ das Pullback der ursprünglichen Familie auf die universelle Überlagerung $\tilde{S}$ von S. Die Familie $\tilde{X} \to \tilde{S}$ ist dann in der differenzierbaren Kategorie isomorph zum Produkt $X \times \tilde{S} \to \tilde{S}$ für eine fixierte Faser X. Sei $h^{1,2}(X) = s$, so dass $h^3(X) = 2s+2$. Man wähle eine symplektische Basis $(\alpha_0, \dots, \alpha_s, \beta_0, \dots, \beta_s)$ von $H_3(X, \mathbb{Z})$. Für $z \in \tilde{S}$ sei nun $\Omega(z)$ eine von null verschiedene, holomorphe 3-Form auf $\tilde{\mathcal{X}}_z$. Dann kann man $z \in \tilde{S}$ den bis auf skalares Vielfaches wohldefinierten Periodenvektor

$$\left(\int_{\alpha_0} \Omega(z), \dots, \int_{\alpha_s} \Omega(z), \int_{\beta_0} \Omega(z), \dots, \int_{\beta_s} \Omega(z) \right)$$

wie in Bemerkung 16.11 in [2] zuordnen. Aus der Deformationstheorie folgt, dass der Raum der möglichen angenommen Periodenvektoren $s+1$-dimensional ist, wobei eine Dimension der nicht vorgenommen Normierung geschuldet ist. Man leite daraus wie in Bemerkung 16.11 ab, dass die ersten $s+1$ Koordinaten den Periodenvektor lokal bestimmen.
Zum Abschluß sollte das Gegenstück zur $(1,1)$-Kopplung, nämlich die $(1,2)$-Kopplung wie in Definition 16.6 [2] gegeben werden.

4. Vortrag (60 Minuten): Degeneration von Hodge-Strukturen

Wir starten mit einer Familie $f : \mathcal{X} \to \Delta^*$ von Kählermannigfaltigkeiten und deren zugeordneter Variation der Hodgestrukturen. Für einen Generator $\gamma \in \pi_1(\Delta^*)$ induziert der Gauss-Manin-Zusammenhang einen Monodromieoperator $T : H^n(X, \mathbb{Z}) \to H^n(X, \mathbb{Z})$ auf jeder Faser X von f. (Parallelverschiebung längs γ) Theorem 16.13 und Definition 16.14 sowie die Bemerkungen danach sollten genannt werden. Mit Hilfe von T konstruieren wir die Gewichtsfiltration

$$0 \subseteq W_0 \subseteq \dots \subseteq W_{2n} = H^n(X, \mathbb{Q}).$$

Von der Gewichtsfiltration springen wir direkt zur Definition 16.25 des "large complex structure limit points" für 3-Mannigfaltigkeiten und den anschließenden Bemerkungen. Die "limiting Hodge filtration" und das "nilpotent orbit theorem" brauchen wir nicht und lassen sie daher weg. Weiter geht es mit der Gewichtsfiltration

$$0 \subseteq S_0 \subseteq \ldots \subseteq S_6 = H_3(X, \mathbb{Q})$$

auf der Homologie und den Propositionen 16.26 und 16.27. Es sollte vielleicht kurz vorgerechnet werden, dass β_0 monodromieinvariant ist und die Periode

$$\int_{\beta_0} \Omega(z)$$

als Funktion auf Δ^* interpretiert werden kann. (Die anderen Perioden sind mehrwertige Funktionen auf Δ^*, wie z.B. auch der Logarithmus log.) Falls noch Zeit ist, kann man kurz auf den Fall $f : \mathcal{X} \to (\Delta^*)^s$ und Theorem 16.24 eingehen. Wir wollen Ω jetzt so normieren, dass

$$\int_{\beta_0} \Omega(z) = 1$$

gilt. Nun werden die kanonischen Koordinaten wie in Abschnitt 16.4 definiert. (w^{nil} und q^{nil} lassen wir weg.) Zum Schluss soll die Spiegelvermutung (Abschnitt 17) formuliert werden.

5. Vortrag (60 Minuten): Der Fall der Quintik

In diesem Vortrag soll die bisherige Theorie am Fall der Quintik

$$X = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^4 \mid x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0\}$$

im $\mathbb{P}^4$ illustriert werden. Das Ziel besteht darin, die Anzahl der rationalen Kurven von kleinem Grad in X zu bestimmen. Dazu muss die Mirrorfamilie von X konstruiert werden. Wegen $h^{1,1}(X) = 1$ hat die Mirrorfamilie $\check{X}_\psi$ einen eindimensionalen Parameterbereich. Diese Familie wird in Abschnitt 18.2 aus [2] definiert. Das genaue Studium der auftretenden Singularitäten und der notwendigen Auflösungen können wir getrost weglassen. Aus Abschnitt 18.3 übernehmen wir einfach nur die Schlussfolgerung, dass $z = 0$ der "large complex structure limit" sein wird. Dies wird sich später ohnehin noch einmal bestätigen. Auch den Abschnitt 18.4 kann man aus Zeitgründen weglassen. Lediglich das Ergebnis

$$\int_{\beta_0} \Omega(z) = const \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n$$

sollte zunächst erwähnt werden. Im ersten Abschnittes aus 18.5 wird die Existenz der Picard-Fuchs-Gleichung für $\Omega(z)$ und dessen Perioden motiviert. Die explizite Gestalt der Picard-Fuchs-Gleichung für unser Beispiel (Gleichung 32) können wir wie in Abschnitt 18.4 aus dem Ausdruck für unsere erste Periode ableiten. (Oder einfach nur hinschreiben.) Es wäre schön, wenn anschließend die Rechnungen und Ergebnisse aus den Abschnitten 18.6, 18.7, 18.8 möglichst vollständig vorgeführt werden. Am Ende des Vortrages sollten, gewissermaßen als Höhepunkt der kleinen AG, die Zahlen N_2, N_3 und N_4 stehen, um die Aussagekraft der Spiegelsymmetrie zu verdeutlichen.

Literatur

[1] J. Carlson, S. Müller-Stach, and C. Peters, *Period mappings and period domains*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[2] M. Gross, D. Huybrechts, and D. Joyce, *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries, Nordfjordeid Lectures*, Universitext, Springer, 2003.

[3] A. Kapustin and D. Orlov, *Vertex algebras, mirror symmetry, and D-branes: the case of complex tori*, Comm. Math. Phys. **233, no. 1** (2003), 79–136.

[4] ———, *Lectures on mirror symmetry, derived categories, and D-branes*, Russian Math. Surveys **59, no. 5** (2004), 907–940.

[5] D. R. Morrison, *Mathematical aspects of mirror symmetry*, Complex algebraic geometry (Park City, UT, 1993), IAS/Park City Math. Ser., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 265–327.