Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

# Übungsblatt 7
# Lineare Algebra 1

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)
Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit den folgenden Untervektorräumen:

$$U_1 := \langle (1,1,1) \rangle, \quad U_2 := \langle (1,1,0),(0,0,1) \rangle, \quad U_3 := \langle (2,0,0),(0,-1,-1),(3,9,9) \rangle,$$
$$U_4 := \langle (1,0,1),(1,1,0),(-1,-2,1),(0,2,-2) \rangle.$$

Man berechne die Dimensionen folgender Vektorräume, indem man explizite Basen angibt.

(a) $U_1 + U_2$ und $U_3 + U_4$;

(b) $U_1 \oplus U_2$ und $U_3 \oplus U_4$;

(c) $\mathrm{Hom}_K(U_1, U_2)$ und $\mathrm{Hom}_K(U_2, U_1)$.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte) *Wahr oder Flasch?*
Sei $K$ ein Körper und sei $V$, $W$ und $Z$ jeweils ein $K$-Vektorraum. Zeige oder widerlege jeweils folgende Aussagen.

(a) Falls es einen Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$ gibt, so ist $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

(b) Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, so gilt $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = 0$.

(c) Sei $f : V \longrightarrow W \oplus Z$ eine Abbildung, und betrachte die Projektionen

$$p : W \oplus Z \longrightarrow W, \quad (w,z) \mapsto w \quad \text{und} \quad q : W \oplus Z \longrightarrow Z, \quad (w,z) \mapsto z.$$

Falls $p \circ f : V \longrightarrow W$ und $q \circ f : V \longrightarrow Z$ lineare Abbildungen sind, so ist auch $f$ eine lineare Abbildung.

(d) Seien $f : V \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow Z$ Abbildungen. Falls $g$ bijektiv und $g \circ f : V \longrightarrow Z$ linear ist, so sind $f$ und $g$ linear.

**Bitte wenden.**

Abgabe ist am **Freitag 9. Dezember 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte) *Die Evaluationsabbildung*
Sei $M$ eine nichtleere endliche Menge und $K$ ein Körper. Sei weiterhin $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und seien $x_1, \ldots, x_n \in M$. Betrachte $\mathrm{Abb}(M, K)$ als $K$-Vektorraum (siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 3(a)), und betrachte die Evaluationsabbildung

$$ev : \mathrm{Abb}(M, K) \longrightarrow K^n, \quad f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

(a) Zeige, dass $ev$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeige, dass $ev$ ein Epimorphismus ist, falls $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$.

(c) Zeige, dass $ev$ ein Monomorphismus ist, falls $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(d) Folgere aus Teil (b) und (c), dass $\mathrm{Abb}(M, K) \cong K^m$, wobei $m$ die Mächtigkeit von $M$ bezeichne.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte) *Bilder linearer Abbildungen*
Sei $K$ ein Körper und sei $V$ und $W$ jeweils ein $K$-Vektorraum. Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.

(a) Zeige, dass das Bild $\mathrm{im}(f) \subset W$ ein Untervektorraum ist.

(b) Zeige oder widerlege: falls $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

(c) Zeige oder widerlege: falls $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, dann sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig.

(d) Gilt $\dim_K(V) \geq \dim_K(\mathrm{im}(f))$ oder $\dim_K(V) \leq \dim_K(\mathrm{im}(f))$?

**Allgemeine Bemerkungen:**

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.

- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.