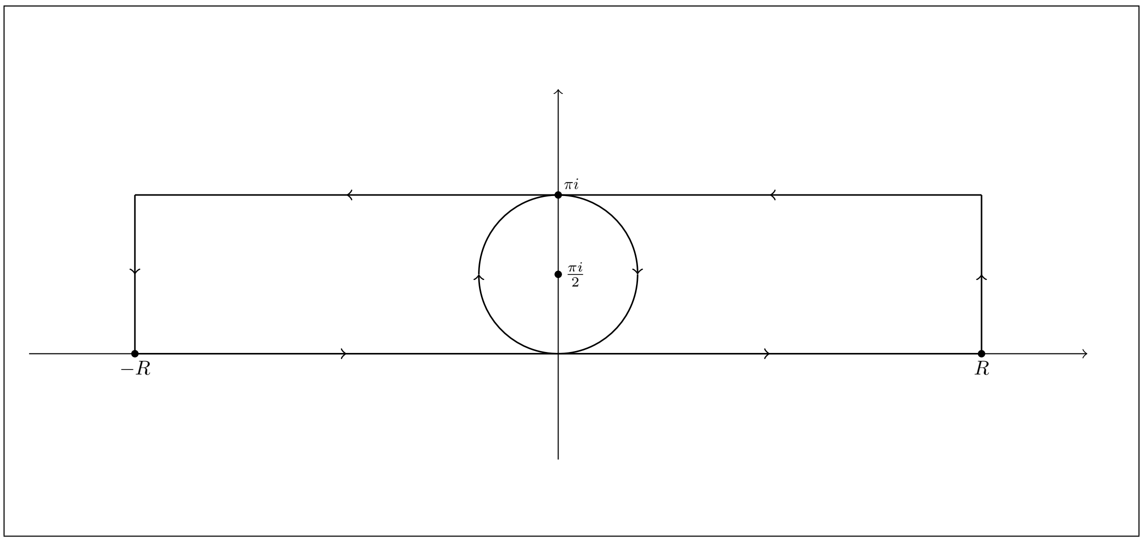
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 12 Abgabetermin : Montag, 7.7.2014



Skizze zu Aufgabe 4.

Aufgabe 1 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ seien holomorph. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Es gilt $f \equiv g$ in U.
2. Die Menge $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in U.
3. Es existiert ein Punkt $z_0 \in U$ derart, dass $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 (Schwarzsches Lemma)
Sei $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |f(z)| \leq |z|$$

für alle $z \in \mathbb{E}$. Existiert zudem ein $c \in \mathbb{E}$ mit $|f(c)| = |c|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, dann ist f von der Form $f(z) = az$ mit einem $a \in \mathbb{C}$ vom Betrag 1.

Aufgabe 3 (Rechenregeln für Residuen)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $g, f \colon U \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Gilt $\operatorname{ord}_c(f) = -1$, dann gilt $\operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z \to c}(z-c)f(z)$.
2. Gilt $\operatorname{ord}_c(f) = -1$ und $\operatorname{ord}_c(g) \geq 0$, dann gilt $\operatorname{Res}_c(fg) = g(c) \operatorname{Res}_c(f)$.
3. Gilt $\operatorname{ord}_c(f) = -n$ mit einem $n \geq 0$, dann gilt $\operatorname{Res}_c(f) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big((z-c)^n f(z)\big)$.
4. Gilt $\operatorname{ord}_c(f) = 1$, dann gilt $\operatorname{Res}_c(1/f) = 1/f'(c)$.
5. Gilt $\operatorname{ord}_c(f) = 1$ und $\operatorname{ord}_c(g) \geq 0$, dann gilt $\operatorname{Res}_c(g/f) = g(c)/f'(c)$.
6. Es gilt $\operatorname{Res}_c(f'/f) = \operatorname{ord}_c(f)$.

Aufgabe 4 (Integralberechnung mittels Residuen)
Für $|\Im a| < 1$ betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{\cosh(z)}$$

Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz - \int_{-\infty}^{\infty} f(z+\pi i)\, dz = \oint_{\left|z - \frac{\pi i}{2}\right| = \frac{\pi}{2}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{\pi i/2}(f)$$

gilt. Leite daraus den Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$$

her. (Tipp: Nutze, dass f in den Halbebenen $\Re(z) > 0$ und $\Re(z) < 0$ eine Stammfunktion besitzt und daher Integrale über geschlossene Wege verschwinden.)

***Aufgabe 5** (Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Zwei Wege $\gamma, \tilde{\gamma} \colon [0,1] \to U$ heißen *homotop in* U, wenn eine stetige Abbildung $H \colon [0,1] \times [0,1] \to U$ mit $H(t,0) = \gamma(t)$ und $H(t,1) = \tilde{\gamma}(t)$ existiert.

Seien nun γ und $\tilde{\gamma}$ stückweise stetig differenzierbare, homotope Wege in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, der von der Homotopieabbildung festgelassen werde, (also $H(0,s) = \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ und $H(1,s) = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$) und sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph.

1. Zeige, dass Zerlegungen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ und Kreisscheiben $B_{i,j} \subset \mathbb{C}$ existieren, sodass für $I_{i,j} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$
$$H(I_{i,j}) \subset B_{i,j}$$
gilt.
2. Zeige, dass Stammfunktionen $F_{i,j}$ von f auf $B_{i,j}$ und eine stetige Abbildung $\phi \colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ existieren, sodass
$$\phi_{|I_{i,j}} = F_{i,j} \circ H$$
gilt und $\phi(0,s)$ und $\phi(1,s)$ konstant sind.
3. Folgere, dass
$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz$$
gilt.