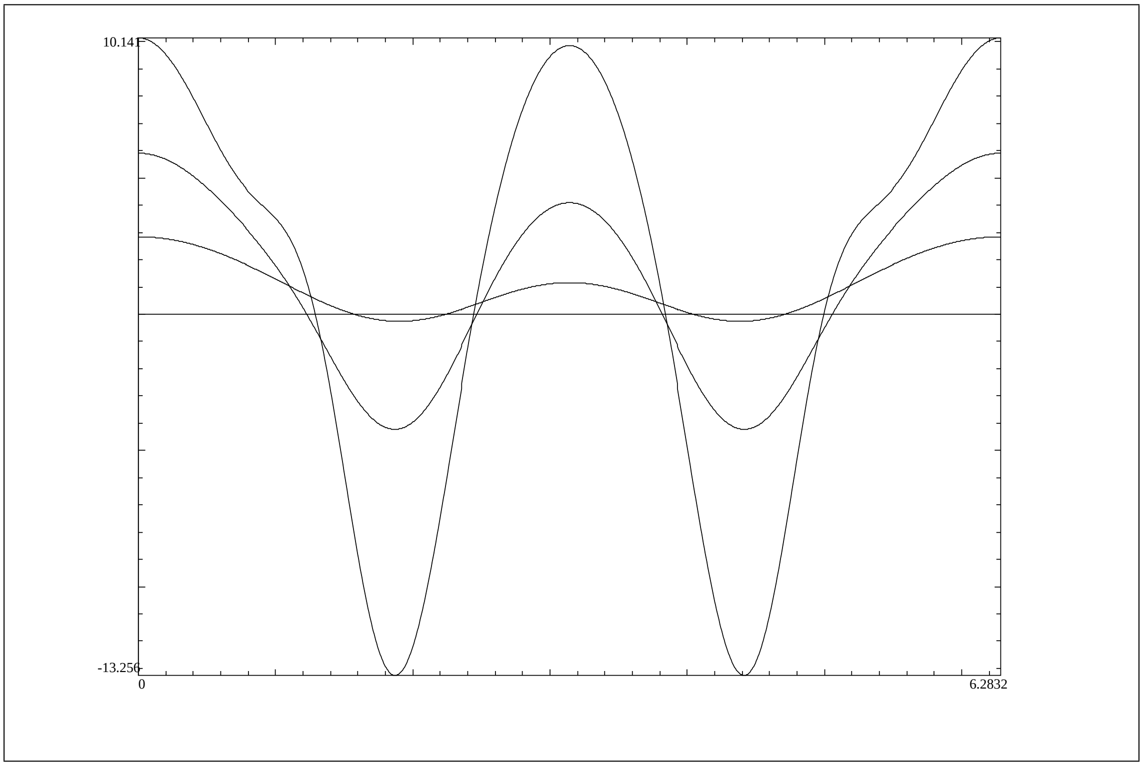
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 9 Abgabetermin : Montag, 16.6.2014



Zur Mittelwerteigenschaft: Der Realteil der Funktion $\sin(z) + z^2 + 1$ längs der Kreislinien $re^{i\phi}$ mit $r \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 1 (Stammgebiete und Stammfunktionen)

Ein Gebiet $S \subset \mathbb{C}$ heißt Stammgebiet, wenn jede in S holomorphe Funktion dort eine Stammfunktion besitzt.

- Beweise oder widerlege, dass es sich bei den folgenden Gebieten um Stammgebiete handelt:
  1. $\mathbb{C}$
  2. $\mathbb{C} \setminus \{i\}$
  3. $\{\sum_{n=1}^{k} \lambda_n z_n \mid \lambda_n > 0,\ \sum_n \lambda_n < 1\}$ für beliebige $z_k \in \mathbb{C}$.
- Zeige, dass die Vereinigung zweier Stammgebiete S_1 und S_2 ebenfalls ein Stammgebiet ist, sofern $S_1 \cap S_2$ zusammenhängend ist. Gib ein Gegenbeispiel für nicht zusammengängendes $S_1 \cap S_2$ an.
- Sei $U = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Zeige, dass die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

in U eine Stammfunktion besitzt.

- Sei
$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z+1}$$
mit $a, b, c \neq 0$. Gib für die folgenden Fälle eine offene, dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, auf der f eine Stammfunktion besitzt (Skizze genügt):
  1. $a + b = 0$
  2. $a + c = 0$
  3. $a + b + c = 0$

Aufgabe 2 (Weierstraßscher Konvergenzsatz)
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die in U lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Zeige, dass auch f holomorph ist. (Tipp: Nutze die Cauchy-Formel)

Aufgabe 3 (Holomorphe Fortsetzung)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und in $U \setminus \{z_0\}$ holomorph. Zeige, dass f in ganz U holomorph ist.

Aufgabe 4 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)
Beweise die folgenden Aussagen:

- Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit
$$f'(z) = af(z).$$
Zeige, dass $f(z) = f(0)e^{az}$ gilt.
- Seien $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots b_n$ komplexe Zahlen. Zeige, dass genau eine ganze Funktion f existiert, welche
$$0 = f^{(n+1)}(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(z)$$
und $f^{(k)}(0) = b_k$ für $0 \leq k \leq n$ erfüllt. (Tipp: Entwickle f im Nullpunkt in eine Potenzreihe.)
- Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion derart, dass $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ reell ist. Zeige, dass $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

***Aufgabe 5** (Holomorphie parameterabhängiger Integrale)
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : [a, b] \times U \to \mathbb{C}$ stetig und $f(t, \cdot)$ für jedes $t \in [a, b]$ holomorph in U. Zeige, dass die Funktion
$$F(z) = \int_a^b f(t, z)\, dt$$
in U eine holomorphe Funktion definiert und dass
$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} f(t, z)\, dt$$
gilt. (Tipp: Zeige, dass das Kurvenintegral von F längs geschlossener Wege in U verschwindet und nutze die Cauchy-Formel für die Ableitung. Dazu ist es nützlich sich an den Satz von Fubini zu erinnern, nach welchem
$$\int_a^b \int_c^d g(t, s)\, ds\, dt = \int_c^d \int_a^b g(t, s)\, dt\, ds$$
gilt, wenn $g : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ stetig ist.)