Konvexe Flächen, Stützfunktion, Krümmungsvergleich

Behandelt werden kompakte, konvexe Flächen M mit positiver Gauss'scher Krümmung K und Paare solcher Flächen, die eine Krümmungsungleichung erfüllen.

Positiv gekrümmte konvexe Flächen haben zu jeder Richtung N genau eine Stützebene $E(N)$ senkrecht zu N, die die Fläche M in einem Punkt berührt und M auf einer Seite lässt. M berandet einen konvexen Körper. Wähle einen inneren Punkt p und definiere:

Der Abstand $h(N) > 0$, den p von $E(N)$ hat, heisst **Stützabstand** von M bezüglich p in Richtung N.

Wir betrachten h als Funktion $h : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$, nach Minkowski genannt **Stützfunktion**. Wir bezeichnen mit $\operatorname{grad} h$ den Gradienten dieser Funktion bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{S}^2$. Dann kann M aus der Kenntnis von h als mit $\mathbb{S}^2$ parametrisierte Fläche angegeben werden:

$$F : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}^3,\ F(e) := h(e) \cdot e + \operatorname{grad} h(e).$$

Zur Rechtfertigung muss gezeigt werden, dass e Normale der Bildfläche im Punkt $F(e)$ ist, denn dann ist $h(e)$ Abstand der Tangentialebene in $F(e)$ von $0 \in \mathbb{R}^3$, also h Stützfunktion der durch F parametrisierten Fläche.
Sei $u \in T_e\mathbb{S}^2$ beliebig, dann gilt:

$$dF_e(u) = h(e) \cdot u + \langle \operatorname{grad} h(e), u\rangle \cdot e + d_u \operatorname{grad} h\big|_e = h(e) \cdot u + D_u \operatorname{grad} h\big|_e,$$

wobei
$$\begin{aligned} D_u \operatorname{grad} h\big|_e &= d_u \operatorname{grad} h\big|_e - \langle d_u \operatorname{grad} h\big|_e, e\rangle \cdot e \\ &= d_u \operatorname{grad} h\big|_e + \langle \operatorname{grad} h(e), u\rangle \cdot e \end{aligned}$$

die Tangentialkomponente der euklidischen Ableitung, also die kovariante Ableitung von $\operatorname{grad} h$ bezüglich der Metrik von $\mathbb{S}^2$ ist. Das heisst:

Für alle $u \in \mathbb{S}^2$ gilt: $\langle dF_e(u), e\rangle = 0$, e ist Normale in $F(e)$.

Weil nun die Normale von $\mathbb{S}^2$ in e und die Normale der konvexen Fläche in $F(e)$ parallel sind, nämlich $= e$, kann man die Tangentialräume identifizieren und bekommt

$$dF_e = h(e) \cdot \mathrm{id} + D\operatorname{grad} h\big|_e.$$

Die Normalenabbildung der konvexen Fläche, $N(e) = e$, ist die Identität. Die Weingartenabbildung S wird manchmal im Definitionsbereich der Parametrisierung beschrieben, also $dN = dF \cdot S$, manchmal im Tangentialraum der Fläche, also $dN = S \cdot dF$. Die erste Beschreibung passt besser zur Tensorrechnung, aber hier ergibt beides dasselbe:

$$S = \big(h(e) \cdot \mathrm{id} + D\mathrm{grad}\, h\big|_e\big)^{-1}.$$

Die Eigenwerte dieses Operators sind die Hauptkrümmungen der konvexen Fläche, und daher sind die Eigenwerte von dF die Hauptkrümmungsradien.

Die Stützfunktion erlaubt, auf einfache Weise zu entscheiden, ob zwei konvexe Flächen $M, \widetilde{M}$ in einander liegen:
Falls für alle $e \in \mathbb{S}^2$ gilt $h(e) \leq \tilde{h}(e)$, so liegen die Stützebenen von M zu den äusseren Normalen e näher am Nullpunkt als die von $\widetilde{M}$. Daher ist M in allen Stützhalbräumen von $\widetilde{M}$ enthalten. Da $\widetilde{M}$ der Durchschnitt all seiner Stützhalbräume ist, liegt M innerhalb von $\widetilde{M}$. Damit zeigt man den

Satz. Voraussetzung: Für alle $e \in \mathbb{S}^2$ gelte für die Hauptkrümmungen zweier konvexer Flächen $M, \widetilde{M}$

$$\min(\kappa_1(e), \kappa_2(e)) \geq \max(\tilde{\kappa}_1(e), \tilde{\kappa}_2(e)).$$

Ausserdem berühre M die Fläche $\widetilde{M}$ in einem Punkt b von innen und $0 \in \mathbb{R}^3$ liege auf der gemeinsamen Normalen N der beiden Flächen durch $b = F(N)$, natürlich im Inneren beider Flächen.
Behauptung:

$$\boxed{M \text{ liegt innerhalb von } \widetilde{M}.}$$

Falls sogar $\min(\kappa_1, \kappa_2) \geq \max(\tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2)$ gilt, so bedeutet das Ergebnis
M kann auf der Innenseite von $\widetilde{M}$ abrollen.

Beweis. Die Voraussetzung über die Hauptkrümmungen bedeutet, dass für jede Normalenrichtung e alle Normalkrümmungen von M in $F(e)$ grösser oder gleich den Normalkrümmungen von $\widetilde{M}$ sind. Oder, die Krümmungsradien aller Normalschnitte von M durch e sind nicht grösser als die von $\widetilde{M}$. Diese Information soll für jeden Grosskreis $c(\varphi)$ mit $F(c(0)) = b = \widetilde{F}(c(0))$ in eine Differentialungleichung für $(h - \tilde{h})(c(\varphi))$ verwandelt werden. Anfangsbedingungen: $h(c(0)) = \tilde{h}(c(0))$, $\mathrm{grad}\, h\big|_{c(0)} = 0 = \mathrm{grad}\, \tilde{h}\big|_{c(0)}$. Ausserdem gilt:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} h(c(\varphi)) = \frac{d}{d\varphi} \langle \mathrm{grad}\, h\big|_{c(\varphi)},\ c'(\varphi)\rangle = \langle D\mathrm{grad}\, h\big|_{c(\varphi)} \cdot c'(\varphi),\ c'(\varphi)\rangle.$$

Seien u_1, u_2 Eigenvektoren von S, also Hauptkrümmungsrichtungen. Wähle u_1, u_2 und $u = u_1 \cdot \cos\alpha + u_2 \cdot \sin\alpha$ als Einheitsvektoren bezüglich der

Riemannschen Metrik g der Fläche, dann gilt für die Normalkrümmungen

$$\kappa = g(Su,u) = \kappa_1 \cdot \cos^2\alpha + \kappa_2 \cdot \sin^2\alpha.$$

Für die Standardmetrik von $\mathbb{S}^2$ ist $c'(\varphi)$ ein Einheitsvektor. Daher ist

$$u := \big(h(c(\varphi))\mathrm{id} + D\mathrm{grad}\, h\big|_{c(\varphi)} c(\varphi)\big)^{-1} \cdot c'(\varphi)$$

ein Einheitsvektor für die Riemannsche Metrik von M und

$$\begin{aligned} g(Su,u) &= \langle dF \cdot Su, dF \cdot u\rangle \\ &= \langle \Big(h(c(\varphi))\mathrm{id} + D\mathrm{grad}\, h\big|_{c(\varphi)} c(\varphi)\Big)^{-1} \cdot c'(\varphi),\ c'(\varphi)\rangle. \end{aligned}$$

Das ergibt die gewünschte Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} h(c(\varphi)) + \frac{d^2}{d\varphi^2} h(c(\varphi)) &= \langle (h(c(\varphi))\mathrm{id} + D\mathrm{grad}\, h\big|_{c(\varphi)}) \cdot c'(\varphi),\ c'(\varphi)\rangle \\ &= \frac{1}{\kappa_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{\kappa_2}\sin^2\alpha \le \frac{1}{\min(\kappa_1,\kappa_2)} \\ &\le \frac{1}{\max(\tilde\kappa_1,\tilde\kappa_2)} \le \frac{1}{\tilde\kappa_1}\cos^2\tilde\alpha + \frac{1}{\tilde\kappa_2}\sin^2\tilde\alpha \\ &= \tilde h(c(\varphi)) + \frac{d^2}{d\varphi^2}\tilde h(c(\varphi)). \end{aligned}$$

Für die Differenz $H(\varphi) := h(c(\varphi)) - \tilde h(c(\varphi))$ gilt also:

$$H(\varphi) + H''(\varphi) \le 0,\ H(0) = 0,\ H'(0) = 0.$$

Betrachte die auf $[0,\pi)$ stetige, auf $(0,\pi)$ differenzierbare Hilfsfunktion $q(\varphi) := H(\varphi)/\sin(\varphi),\ q(0) = 0$. Es folgt in $(0,\pi)$:

$$q'(\varphi) = \frac{H'(\varphi)\sin\varphi - H(\varphi)\cos\varphi}{\sin^2(\varphi)} = \frac{\int_0^\varphi (H(\phi) + H''(\phi))\sin\phi)d\phi}{\sin^2(\varphi)} \le 0.$$

Damit ist $q(\varphi) \le 0$ und deshalb auch $H(\varphi) \le 0,\ h(\varphi) \le \tilde h(\varphi)$ für $\varphi \in [0,\pi]$. Dies gilt für alle Anfangsrichtungen von Großkreisen $c(\varphi)$ durch b. Das zeigt für alle $e \in \mathbb{S}^2$: $h(e) \le \tilde h(e)$, oder:

M liegt innerhalb von $\widetilde{M}$.