Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Auf diesem Blatt werden grundlegende Begriffe und Argumente aus dem WS wiederholt, die von jetzt an als Handwerkszeug betrachtet werden. Nutzen Sie diese Gelegenheit, Ihren Tutoren Fragen zu stellen. Es ist besonders einfach und sinnlos, die Lösungen zu diesem Blatt abzuschreiben.

Aufgabe 1.1 L (Kern und Bild bei Gruppenhomomorphismen)

Für lineare Abbildungen $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ haben wir gesehen, daß Kern bzw. Bild von L Unterräume von V bzw. W sind. Jetzt seien G, H Gruppen und $\Phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Bearbeite mit denselben Argumenten wie im linearen Fall:

a) Schreibe die Gruppenaxiome und die Definition für "Gruppenhomorphismus" auf.
b) Zeige, daß Kern bzw. Bild von Φ Untergruppen von G bzw. H sind.
c) Es seien $a, g \in G$ und $\Phi(g) = e_H$, das neutrale Element in H. Zeige $\Phi(aga^{-1}) = e_H$.

Aufgabe 1.2 A (Kontrahierende Abbildungen)

Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine vollständige Teilmenge und $F : A \to A$ q-kontrahierend, $0 < q < 1$, d.h. für alle $x, y \in A$ ist $|F(x) - F(y)| \leq q \cdot |x - y|$. Zeige:

a) Für jedes $a_0 \in A$ definiert $a_{n+1} := F(a_n), n = 1, 2, \ldots$ eine geometrisch majorisierte Cauchyfolge in A.
b) Der Grenzwert $a_\infty = \lim a_n$ existiert und ist Fixpunkt von F, d.h. $F(a_\infty) = a_\infty \in A$.

Aufgabe 1.3 A (Potenzreihen und geometrische Majorisierung)

Gegeben sei eine Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$; damit werden Polynome definiert: $P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$, $z \in \mathbb{C}$. Falls eine Grenzfunktion existiert, heißt sie *Potenzreihe*. Voraussetzung: Für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert $P_n(z_0)$. Zeige:

a) Falls $|z| \leq q \cdot |z_0|$ ist, so ist $\{P_n(z)\}$ eine q-geometrisch majorisierte Cauchyfolge.
b) $\{P_n'(z)\}$ ist eine $\tilde{q}$-geometrisch majorisierte Cauchyfolge, $\tilde{q} \in (q, 1)$ geeignet.

Aufgabe 1.4 A (Äquivalenz der Stetigkeitsdefinitionen)

Betrachte Abbildungen (Kurven, Funktionen) $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$.

a) Definiere "folgen-stetig" und "ϵ-δ-stetig".
b) Zeige die Äquivalenz beider Definitionen.

Aufgabe 1.5 A (Mehrfache Schrankensatz Anwendungen)

Betrachte Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Formuliere die endgültige Differenzierbarkeitsdefinition und den Schrankensatz.

b) Setze beschränkte zweite Ableitung voraus: $|f''| \leq B$,
definiere die Sehne $s_{ab}(x) := (f(a)(b-x) + f(b)(x-a))/(b-a)$
und zeige: $x \in [a,b] \Rightarrow |f(x) - s_{ab}(x)| \leq (B/2) \cdot (b-x)(x-a)$.

Aufgabe 1.6 L (Permutationen)

Die Zykel-Beschreibung von Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sei bekannt.

a) Geben Sie eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ an, die die beiden Permutationen $\tau_1 := (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ und $\tau_2 := (2\ 4\ 6)(3\ 5)$ konjugiert, d.h. $\tau_1 = \sigma\tau_2\sigma^{-1}$.

b) Zeige: Die Potenzen $\{\tau_1^k, k = 1, \ldots, 6\}$ und $\{\tau_3^k, k = 1, \ldots, 6\}$ mit $\tau_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ sind beides "zyklische" Untergruppen der Ordnung 6 in $\mathfrak{S}_6$. Begründe, daß τ_1 und τ_3 **nicht** konjugiert zueinander sind.

c) Schreibe $\tau_1,\ \tau_3$ als Produkte von Transpositionen und bestimme $\operatorname{sign}(\tau_1),\ \operatorname{sign}(\tau_3)$.

Aufgabe 1.7 L (Wie kommt man zu Matrizen?)

Für einen K-Vektorraum V betrachte $L, M \in \mathrm{Hom}(V,V) = \mathrm{End}(V)$.

a) Wie kommt man zu "einer" Matrix für L? Welche Wahlfreiheiten hat man? Was muß man festlegen, damit sie eindeutig ist?

b) Wie kann man "eine" Matrix für $L \circ M \in \mathrm{End}(V)$ aus Matrizen für L, M bekommen?

Aufgabe 1.8 L (Diagonalisieren von symmetrischen Matrizen)

Betrachte für $x \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

a) Zeige, daß die ersten 3 Spalten von $A(x)$ linear unabhängig für jedes x sind. Folgere, daß die Matrix $A(x)$ Rang≥ 3 hat.

b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ so, daß die Matrix $A(x)$ genau Rang$= 3$ hat.

c) Bestimme die Eigenvektoren der Matrix $A(2)$. *Tip: Teil b).*

In diesem Semester empfehlen wir wieder, gelegentlich die Homepage

http://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/

anzusehen: Klausurtermine, Ergebnisse, aktuelle Übungsblätter, roter Faden, die Informationen vom WS.

Beschwerden am Semesterende nützen nichts. Wenn Sie Änderungswünsche haben, melden Sie sich bitte umgehend.

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 2.1 L (Gruppen und Gruppenhomomorphismen)

Sei V eine K-Vektorraum mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

a) Zeige, daß $\mathrm{Aut}(V)$, die Menge aller invertierbaren Endomorphismen von V, eine Gruppe bildet.

b) Für eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sei $L(\sigma)\colon V \to V$ die lineare Abbildung bestimmt durch

$$L(\sigma)\colon e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$$

Bestimme die Matrix ("Pemutationsmatrix") von $L(\sigma)$ bezüglich der gegebenen Basis.

c) Zeige, daß die Abbildung

$$L\colon \mathcal{S}_n \to \mathrm{Aut}(V), \quad L\colon \sigma \mapsto L(\sigma)$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 2.2 L (Konjugationsklassen)

Zwei Elemente g_1, g_2 einer Gruppe G sind *konjugiert* wenn es $h \in G$ gibt mit $g_2 = hg_1h^{-1}$.

a) Schreibe die Gruppenaxiome auf.

b) Zeige, daß dies eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

c) Die Abbildung ("Konjugation") $K_h : G \to G,\ g \mapsto hgh^{-1}$ ist ein Homomorphismus.

Aufgabe 2.3 L (Quotientenvektorraum I)

Seien V ein K-Vektorraum und W ein Untervektorraum. Für $v, v' \in V$ definieren wir $v \simeq v'$ wenn $v - v' \in W$. Nach Aufgabe 9.1 im Wintersemester ist $\simeq$ eine Äquivalenzrelation. Sei V/W die Menge der Äquivalenzklassen und für $v \in V$ bezeichne durch $[v]$ das zugehörige Element (Äquivalenzklasse) in V/W.

a) Zeige, daß die Operationen

$$[v] + [v'] := [v + v'] \quad \text{und} \quad k[v] := [k \cdot v] \quad (k \in K)$$

wohldefiniert sind (vergleiche mit der Vorlesung im Wintersemester).

b) Zeige, daß mit diesen Operationen V/W zu einem K-Vektorraum wird. V/W heißt *Quotientenvektorraum.*

c) Die "natürliche" Abbildung $[\,] : V \to V/W,\ v \mapsto [v]$ ist linear.

Diese Aufgabe wird fortgesetzt.

Aufgabe 2.4 L (Bilinearformen)

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

a) Sei b eine Bilinearform auf V, also $b : V \times V \to K$ so daß für $x, y \in V$ die beiden partiellen Abbildungen $x \mapsto b(x, y)$ und $y \mapsto b(x, y)$ **linear** sind. Bestimme eine Matrix $(b) = (b_{i,j})_{i,j}$ so daß für alle $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ gilt:

$$b(x, y) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) Bezeichne mit $\mathrm{Bil}(V)$ die Menge aller Bilinearformen auf V. Zeige, daß $\mathrm{Bil}(V)$ ein K-Vektorraum ist.

c) Gib eine Basis von $\mathrm{Bil}(V)$ an, so daß die Matrizen zu diesen Basis-Bilinearformen möglichst einfach sind, vgl a).

Aufgabe 2.5 A (Integrationsregeln)

Mit Hilfe vom Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und der Differentiationsregeln beweise für stetig differenzierbare Funktionen f, g:

a) (Substitutionsregel) $\int_a^b u(v(x))v'(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(x)dx$.

b) (Partielle Integration) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

Aufgabe 2.6 A (Logarithmus)

Sei $\log\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

a) Zeige, daß $\log'(x) = 1/x$ für alle $x > 0$.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenzierbar. Bestimme eine Stammfunktion für $x \mapsto f'(x)/f(x)$.

Aufgabe 2.7 A (Stammfunktionen bestimmen)

Bestimme Stammfunktionen für die folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = \sin(x)\cos(x), \quad f_2(x) = (\sin(x))^3$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x\log(x)}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x\log(x)\log(\log(x))}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$$

Aufgabe 2.8 A (Harmonische Reihe)

a) Zeige, daß die Folge $(\sum_{k=1}^n k^{-1})_n$ nicht beschränkt ist.

b) Zeige dagegen, daß für alle $\epsilon > 0$ die Folge $(\sum_{k=1}^n k^{-(1+\epsilon)})_n$ konvergiert.

Tip: Manche Reihen kann man als Riemannsummen ansehen.

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 3.1 L (Permutationen)

a) Zeige durch Induktion über n, daß die Permutation mit Zykel-Beschreibung $(1\ 2\ \dots\ n)$ Signum $(-1)^{n+1}$ hat.

b) Zeige sehr kurz, daß zwei Permutationen $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ mit je nur einem nicht trivialen Zykel genau dann konjugiert sind, wenn diese Zykeln gleiche Länge haben (Beispiel $\sigma = (1, 3, 10)$ ist konjugiert zu $\sigma' = (2, 12, 7)$).

c) Zeige (nicht durch Probieren), daß folgende Permuntationen in $\mathfrak{S}_{15}$ konjugiert sind:

$$\sigma = (1, 3, 5, 7)(13, 10)(11, 12, 4, 6, 8, 9)(15, 2, 14),$$
$$\sigma' = (1, 2, 3, 4)(5, 6)(7, 8, 9, 10, 11, 12)(13, 14, 15)$$

d) Mit denselben Bezeichnungen wie in c) berechne das Signum von σ und σ'.

Aufgabe 3.2 L (Quotientenvektorraum II)

Seien wie in der Aufgabe "Quotientenvektorraum I" V ein n-dimesionaler K-Vektorraum, $W \subset V$ ein Untervektorraum und V/W der Quotientenvektorraum.

a) Bestimme die Dimension von V/W. Zeige dazu: Falls $[v_1], \dots, [v_r]$ linear unabhängig in V/W sind, so sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig in V.

b) Sei $L \in \mathrm{End}(V)$ und W L-invarianter Unterraum, also $L(W) \subset W$. Zeige, daß die folgende Abbildung wohldefiniert und linear ist.

$$L' \colon V/W \to V/W, \quad L'([v]) := [L(v)]$$

Aufgabe 3.3 L (Rang)

Seien V ein d-dimensionaler K-Vektorraum und $A, B \in \mathrm{End}(V)$.

a) Schreibe die Definition von Kern auf und zeige

$$\dim(\mathrm{Kern}(A \circ B)) \le \dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Kern}(B))$$

b) Schreibe die Definition von rang auf und zeige

$$\mathrm{rang}\ (A \circ B) \le \min\{\ \mathrm{rang}\ (A),\ \mathrm{rang}\ (B)\}$$

Aufgabe 3.4 L (Spur)

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$. Für $L \in \mathrm{End}(V)$ sei $(L) = (l_{ij})_{i,j}$ die Matrix von L bezüglich $\mathfrak{B}$. Definiere die *Spur* von L bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ als die Summe der Diagonaleinträge von (L), also

$$\mathrm{Spur}_{\mathfrak{B}}(L) = \sum_j l_{j,j}$$

a) Schreibe auf, wie sich die Matrix $(A \circ B)_{m,n}$ der Komposition aus den Matrizen $(A), (B)$ der Faktoren berechnet. Zeige dann, daß für alle $A, B \in \mathrm{End}(V)$, gilt:

$$\mathrm{Spur}_{\mathfrak{B}}(AB) = \mathrm{Spur}_{\mathfrak{B}}(BA).$$

b) Zusätzlich sei B invertierbar, folgere: $\quad \mathrm{Spur}_{\mathfrak{B}}(BAB^{-1}) = \mathrm{Spur}_{\mathfrak{B}}(A)$.
(Insbesondere ist die Spur in der Konjugationsklasse von A konstant.)

c) Sei $\mathfrak{B}'$ eine zweite Basis von V. Folgere aus b), daß für alle $A \in \mathrm{End}(V)$ gilt
$$\mathrm{Spur}_{\mathfrak{B}}(A) = \mathrm{Spur}_{\mathfrak{B}'}(A) \ .$$

Aufgabe 3.5 A (Normen)

a) Sei $\| \ \|$ eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zeige, daß die Kugel vom Radius 1, also $\{v \in V \ \| \ \|v\| \leq 1\}$, konvex und — im Falle $\dim(V) < \infty$ — vollständig ist.

b) Sei jetzt V endlich dimensional (wo wird das benutzt?). Definiere für $L \in \mathrm{End}(V)$

$$\|L\|_\infty := \max_{v \in V, \|v\|=1} \|Lv\|$$

Zeige, daß $\| \ \|_\infty$ eine Norm auf $\mathrm{End}(V)$ definiert. Diese Norm heißt *Operatornorm*.

c) Zeige für alle $L, L' \in \mathrm{End}(V)$, daß $\|L \circ L'\|_\infty \leq \|L\|_\infty \|L'\|_\infty$ gilt.

d) Sei $A \in \mathrm{End}(V)$ mit $\|A\|_\infty < 1$. Zeige, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ in $\mathrm{End}(V)$ konvergiert, und daß der Limes genau $(Id - A)^{-1}$ ist. (Ist $\{A^n\}$ eigentlich eine Nullfolge?)

Aufgabe 3.6 A (Hyperbel)

Sei $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := x^{-1}$. Verwende in $\mathbb{R}^2$ das Standardskalarprodukt, also die Pythagoras-Norm $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

a) Skizziere den Graphen $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ \| \ x > 0\}$.

b) Man kann die Punkte (R, R) und $(-R, -R)$ auf der 45°-Linie so wählen, daß die Differenz ihrer Abstände zu $(x, 1/x)$ nicht von x abhängt. Zeige durch Differenzieren (Kettenregel vor allem), daß die folgende Funktion, für geeignetes R, konstant ist:
$$x \mapsto \|(x, x^{-1}) - (R, R)\| - \|(x, x^{-1}) - (-R, -R)\|$$

(*Tip: In der Rechnung ist es nützlich* $(a + b + c)^2 = \ldots$ *im Kopf zu haben.*)

Aufgabe 3.7 A (Schraubenlinie)

Betrachte die Kurve $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$.

a) Mache eine Skizze der Kurve.

b) Formuliere eine vernünftige Definition von *steiler*.

c) Zeige für die Kurve γ, daß alle Sehnen steiler als die Tangenten sind.

Aufgabe 3.8 A (Offene Mengen)

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\epsilon_x > 0$ gibt, so daß für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - x\| < \epsilon_x$ gilt: $y \in U$. Oder: Die Kugeln vom Radius ϵ_x um x liegen alle in U. (Diese Definition wird auch in $\mathbb{Q}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ benutzt, sogar in metrischen Räumen.)
Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Zeige, daß die Menge $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ f(x) \in U\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. (Oder: Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind offen.)

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 4.1 L (Skalarprodukt und Polynome, vgl. WS Aufg. 11.1)

Für $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ definiere

$$\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

a) Zeige, daß $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_2[X]$ ist.

b) Orthonormalisiere die Standard Basis $\{1, X, X^2\}$.

Aufgabe 4.2 L (Formel für Fibonacci Zahlen, vgl. WS Aufg. 7.4, 13.1)

Sei e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Betrachte den Endomorphismus, der durch folgende Matrix gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die zugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2 von A.

b) Was sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A^k mit $k > 0$?

c) Sei S der Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $S(e_i) = v_i$ für $i = 1, 2$. Welche der folgenden Matrizen ist eine (anzugebende) Diagonalmatrix D (Es wird eine Begründung erwartet! Eine Rechnung ist nicht willkommen!):

$$S\ A\ S^{-1} \quad \text{oder} \quad S^{-1}\ A\ S\ ?$$

Folgere $A = S^?\ D\ S^?$.

d) Für $k > 0$ seien $a_{i,j}^{(k)}$ (mit $i, j \in \{1, 2\}$) die Einträge der Matrix A^k. Gib eine geschlossene Formel für $a_{i,j}^{(k)}$ an (also, keine rekursive Formel). In der Aufgabe 7.4 im Wintersemester hatten wir gesehen, daß $a_{1,2}^{(k)}$ genau die k-te Fibonacci Zahl ist.

Aufgabe 4.3 L (Determinanten)

Sei A eine 3×3-Matrix und für $k, j \in \{1, 2, 3\}$ sei $A_{k,j}$ die komplementäre 2×2-Matrix, also z.B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}$$

a) Zeige die Formel $\det(A) = \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1})$.

b) Zeige nur mit den Eigenschaften der Determinante, also ohne eine einzige Rechnung zu machen, daß für alle $j \neq 1$ gilt $0 = \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1} a_{k,j} \det(A_{k,1})$.

Aufgabe 4.4 L (Orthogonale Endomorphismen I)

Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $L \in \mathrm{End}(V)$ eine Isometrie ($\langle Lv, Lw\rangle = \langle v, w\rangle$).

a) Seien $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und (L) die Matrix von L bezüglich dieser Basis. Zeige, daß die Matrix (L^{-1}) von L^{-1} die Matrix ist, die aus (L) durch "Spiegeln an der Hauptdiagonale" ensteht.

b) Zeige, daß $L + L^{-1}$ ein symmetrischer Endomorphismus bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ ist.

c) Seien $W \subset V$ ein Untervektorraum, für den gilt $L(W) \subset W$, und $W^{\perp}$ sein orthogonales Komplement. Zeige, daß $L(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$ gilt. (Analog wie bei invarianten Unterräumen symmetrischer Endomorphismen.)

Aufgabe 4.5 A (Kreise in $\mathbb{C}$, Kreise sind eben überall)

Seien $m \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ gegeben.

a) Überzeuge Deinen Tutor, daß die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid (z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2\}$ ein Kreis ist.

b) Nehme jetzt an, daß $|m| \neq r$ gilt. Zeige, daß $\{z \in \mathbb{C} \mid (z^{-1} - m)(\overline{z^{-1} - m}) = r^2\}$ auch ein Kreis ist. Bestimme Mittelpunkt und Radius.

c) So wie in b), was passiert wenn $|m| = r$.

Aufgabe 4.6 A (Taylorfeinde haben große Ableitungen!)

Sei $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Nehme an, daß $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 0$ gilt (Beispiele solcher Funktionen hat man in Aufgabe WS 9.7 gesehen). Ferner nehme an, daß für alle $k > 0$ und alle $x \in (-1, 1)$ gilt $|f^{(k)}(x)| \leq (k - 1)!$

a) Zeige, daß für alle $x \in (-1, 1)$ gilt
$$|f(x)| \leq \int_0^x \left(\int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} |f^{(3)}(t_3)| dt_3\right) dt_2\right) dt_1$$

b) Folgere, daß $|f(x)| \leq \frac{|x|^3}{3}$ gilt.

c) So wie in a) und b) zeige, daß für alle $x \in (-1, 1)$ gilt $f(x) = 0$.

Aufgabe 4.7 A (Inverse finden, vgl. WS Aufg. 14.2)

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Ferner nehme an, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{2}{3}$ gilt $|f'(z) - 1| \leq \frac{2}{3}$.

a) Zeige, daß $f(z) = \sin(z)$ die Vorsausetzungen erfüllt.

b) Für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < \frac{2}{9}$ definiere $\quad F_w(z) := z - (f(z) - w)$.
Zeige, daß F_w die Scheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{2}{3}\}$ kontrahierend in sich abbildet. Folgere, daß in dieser Scheibe ein eindeutiger Fixpunkt z_w von F_w existiert.

c) Zeige, daß daß z_w f-Urbild von w ist, also $f(z_w) = w$ gilt.

Aufgabe 4.8 A (Newton-Verfahren, vgl. WS Aufg. 14.2)

Zeige, daß das standard Newton Verfahren für die Funktion $f(z) = z^3$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|1 - z| < 1/6$ gegen ein Urbild von 1 konvergiert. *Erinnerung:* $N(z) := z - (f(z) - A)/f'(z)$

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 5.1 L (Alternierende Multilineare Abbildungen)

Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V^k = V \times \ldots \times V \to K$ multilinear (auch: k-linear, k ist vielleicht nicht gleich n!!!).

a) Schreibe die Definitionen von 1) multilinear und 2) alternierend auf.

b) Zeige, daß f alternierend genau dann ist, wenn bei Übereinstimmung von zwei Argumenten, $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, folgt: $f(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

c) Zeige, daß $Alt_k(V) = \{f\colon V^k \to K \mid \text{multilinear, alternierend}\}$ ein K-Vektorraum ist.

d) Bestimme die Dimension von $Alt_3(V)$.

Aufgabe 5.2 L (Bilineare Abbildungen)

Seien V ein K-Vektorraum und $f\colon V \times V \to K$ bilinear. ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$)

a) Definiere $f_{sym}\colon V \times V \to K$ durch $f_{sym}(u, v) = \frac{1}{2}(f(u, v) + f(v, u))$. Zeige, daß f_{sym} eine *symmetrische* Bilinearform ist.

b) Definiere $f_{alt}\colon V \times V \to K$ durch $f_{alt}(u, v) = \frac{1}{2}(f(u, v) - f(v, u))$. Zeige, daß f_{alt} eine alternierende Bilinearform ist.

c) Folgere, daß jede bilineare Abbildung sich als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden schreiben läßt. Ferner zeige, daß wenn $f := f_1 + f_2$ mit f_1 symmetrisch und f_2 alternierend $f_{sym} = f_1$ and $f_{alt} = f_2$ gilt.

d) Nehme jetzt an, daß f symmetrisch ist. Definiere $q_f\colon V \to K$ durch $q_f(v) := f(v, v)$. Zeige: f ist durch q_f bereits bestimmt, d.h. zeige, daß für alle $u, v \in V$ gilt

$$f(u, v) = \frac{1}{4}\left(q_f(u + v) - q_f(u - v)\right)$$

Aufgabe 5.3 L (Dualraum $\mathrm{Hom}(V, K)$)

Seien wie üblich V, W K-Vektorräume. Sei $f\colon V \to W$ einen Homomorphismus.

a) Zeige: Die Abbildung $f^*\colon \mathrm{Hom}_K(W, K) \to \mathrm{Hom}_K(V, K)$ ist linear, wobei f^* definiert ist für jedes $\ell \in \mathrm{Hom}_K(W, K)$ durch $f^*(\ell) := \ell \circ f$.

b) Zeige, daß f^* injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

c) Zeige, daß f^* surjektiv ist, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 5.4 L (Charakteristische Polynome)

Betrachte die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die charakteristischen Polynome $\chi_A(T) := \det(A - T \cdot \mathrm{id})$ (bzw. $\chi_B(T)$) von A (bzw. B). Zeige, daß $\chi_A(A) = \chi_B(B) = 0$.
b) Seien $M_A(T) := (T-2)(T-3)^3$ und $M_B(T) := (T-2)^2(T-3)^2$. Zeige, daß
$$M_A(A) = 0,\ M_A(B) \neq 0,\ M_B(A) \neq 0 \text{ und } M_B(B) = 0$$
c) Folgere, daß es keine Matrix C gibt mit $B = CAC^{-1}$. (*Tip: Polynom*(CAC^{-1})=?)
d) Zeige daß die Matrix A nicht diagonalisierbar ist. (*Tip: Rang* !)

Aufgabe 5.5 A (Gleichmäßige Stetigkeit)

a) Schreibe die Definitionen von 1) gleichmäßig stetig und 2) stetig auf.
b) Gib ein Beispiel einer stetigen aber nicht gleichmäßig stetigen Funktion.
c) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ der Definitionsbereich einer gleichmäßig stetigen Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}^e$. Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in A (nicht notwendig konvergent in A!!!). Zeige, daß die Folge $(f(x_n))_n$ ebenfalls eine Cauchy-Folge ist.
c) Sei $g\colon A \to \mathbb{R}^e$ dehnungsbeschränkt. Zeige, daß g gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 5.6 A (Rest für die Taylorformel)

Sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und sei $T_k(x)$ für $k > 0$ das Taylor Polynom von Grad k an der Stelle 0. Ziel dieser Aufgabe ist, abzuschätzen, wie gut die Taylorpolynome f approximieren. Wir werden sehen: Falls $\|f^{(k)}\|_\infty := \sup_{x\in(-1,1)} |f^{(k)}(x)|$ nicht zu groß ist, so ist das Taylorpolynom T_{k-1} eine gute Approximation von f. Diese Aufgabe soll mit der Aufgabe 4.6 A verglichen werden.

a) Zeige, daß für alle $x \in (-1,1)$ gilt
$$|f(x) - T_2(x)| \leq \int_0^x \left(\int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} |f^{(3)}(t_3)| dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1$$
b) Folgere, daß $\|f(x) - T_2(x)\|_\infty \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!}$ gilt.
c) So wie in a) und b) zeige, daß für alle k gilt: $\quad \|f - T_k\|_\infty \leq \frac{\|f^{(k+1)}\|_\infty}{(k+1)!}$

Aufgabe 5.7 A (Partialbruchzerlegung, gut für Stammfunktionen)

Bestimme Stammfunktionen für die folgenden Funktionen. $f_1(x) := \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ und $f_2(x) := \frac{x^3+3x}{(x-1)(x-2)^2}$. (*Welches Gleichungssystem muß gelöst werden, um die Partialbruchzerlegung von f_i zu finden? Vergleiche mit der Aufgabe 4.7 L im Wintersemester*).

Aufgabe 5.8 A (Ellipse, Gärtnerkonstruktion und Flüstergewölbe)

Seien $a > b > 0$ gegeben. Betrachte die Kurve $\gamma(t) := (a\cos(t),\ b\sin(t))$, ferner sei $e := (\sqrt{a^2-b^2}, 0)$.

a) Zeige, daß die Funktion $t \mapsto \|\gamma(t) - e\| + \|\gamma(t) + e\|$ konstant in t ist.
b) Zeige, daß die Tangente zu γ an der Stelle t senkrecht zur Winkelhalbierenden der Vektoren $\gamma(t) - e$ und $\gamma(t) + e$ ist. (*Licht von e wird in $\gamma(t)$ nach $-e$ reflektiert.*)

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 6.1 A (Integrale)

Bestimme Stammfunktionen für folgende Funktionen (Es ist nicht gefragt, besonders geschickt in irgendwelchen Formelsammlungen zu suchen, sondern zu substituieren usw...)

$$f_1(x) = \sin^3(x), \quad f_2(x) = \cos(\sin(\sin(x))) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x),$$

$$f_3(x) = 2x \log(\cos(x)) - x^2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad f_4(x) = \frac{-\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}.$$

Aufgabe 6.2 A (Norm)

Sei $A \subset \mathbb{R}^e$ beschränkt und vollständig. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller dehnungsbeschränkten Funktionen von A in $\mathbb{R}^d$. Für $f \in V$ definiere

$$\|f\|_L := \max\{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^d} \| x \in A\} + \inf\{L \| L \text{ ist Dehnungsschranke für} f\}$$

a) Zeige, daß $\| \ \|_L$ eine Norm auf V definiert.

b) Zeige, daß V bezüglich dieser Norm vollständig ist. (Was ist eigentlich zu zeigen?)

c) Ist V vollständig bezüglich der Norm $\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^d} \| x \in A\}$?

Aufgabe 6.3 A (Reelle Polynome)

Sei $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß $P(X)$ Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat.

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P. Zeige, daß dann $\overline{z}$ auch eine Nullstelle von P ist.

b) Folgere, daß $P(X)$ sich als Produkt von linearen und quadratischen Polynomen mit **reellen** Koeffizienten schreiben läßt.

Aufgabe 6.4 A (Inverse finden II)

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Ferner nimm an, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{2}{3}$ gilt $|f'(z) - 1| \leq \frac{2}{3}$ *Alle Bezeichnungen sind genau wie in der Aufgabe 4.7 A (Inverse finden).* Mit Hilfe des Fixpunktes z_w der $\frac{2}{3}$-kontrahierenden Abbildung $F_w(z) = z - (f(z) - w)$ hatten wir eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \{|w| < \frac{2}{9}\} \to \{|z| \leq \frac{2}{3}\}$, $f^{-1}(w) := z_w$ definiert.

a) Zeige, daß für alle w_1, w_2, $|w_j| < \frac{2}{9}$ gilt $\|F_{w_1} - F_{w_2}\|_\infty \leq |w_1 - w_2|$.

b) Folgere aus der Dreiecksungleichung (und natürlich aus $z_w = F_w(z_w)$) $(1 - \frac{2}{3}) \cdot |z_{w_1} - z_{w_2}| \leq \|F_{w_1} - F_{w_2}\|_\infty$. Folglich: $|f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w_2)| \leq 3 \cdot |w_1 - w_2|$.

c) Wiederholung: Die Differenzierbarkeit von f^{-1} folgt aus der von f und aus b) in zwei Zeilen (Zuerst die Definition der Differenzierbarkeit von f hinschreiben!).

Aufgabe 6.5 L (Ringe)

a) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $x \simeq y$ genau dann wenn $x - y$ durch 12 teilbar ist. **Zeige,** daß $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist. Bezeichne durch x mod 12 die Äquivalenzklasse von x und die Menge aller Äquivalenzklassen durch F_{12}.

b) Zeige, daß die Summe $(x \bmod 12) + (y \bmod 12) := (x + y) \bmod 12$ und die Multiplikation $(x \bmod 12)\ (y \bmod 12) := (x\ y) \bmod 12$ **wohldefiniert** sind.

c) Zeige **mit b),** daß mit diesen beiden Operationen F_{12} zu einem Ring wird.

d) Warum ist F_{12} kein Körper?

Aufgabe 6.6 L (Diagonalisierbare Endomorphismen)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $L: V \to V$ ein Endormorphismus.

a) Zeige, daß L diagonalisierbar ist, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und alle Nullstellen **verschieden** sind.

b) Seien jetzt $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}_3[X]$. Gib ein Beispiel eines Endomorphismus, der nicht diagonalisierbar ist (Mit Beweis!!!).

Aufgabe 6.7 L (Quotientenräume und Isomorphiesatz)

Seien V, W K-Vektorräume und sei $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

a) Zeige, daß F einen Homomorphismus

$$\overline{F}: V/Kern(F) \to Bild(F) \subset W$$

des Quotientenraums $V/Kern(F)$ auf das Bild von F induziert .

b) Zeige, daß $\overline{F}$ injektiv ist und folgere, daß $\overline{F}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 6.8 L (Polynome und Endomorphismen)

Seien V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, e_1, e_2, e_3, e_4 eine Basis und L der Endomorphimus von V, dessen Matrix bezüglich der gegebenen Basis ist:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{Q}$$

a) Sei $N = L - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Berechne N^2, N^3, N^4, N^5 und N^{10}.

b) Bemerke, daß N und $(\lambda \cdot \mathrm{id})$ kommutieren. Benutze dann a) um L^2, L^3, L^4, L^5 und L^{10} zu berechnen.

c) Gib eine Formel für L^n für alle $n \geq 1$.

Wichtig: Anmeldung für die Lin. Algebra-Klausur (am Sa 10.6. 9.15 Uhr) beim Übungsleiter erforderlich, schriftlich mit lesbarem Namen und Matrikelnummer. Die Auswertung soll Samstag fertig werden.

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 7.1 L (Normalformen)

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Seien $L_1, L_2, M_1, M_2 \in \mathrm{End}(V)$ so, daß deren Matrizen bezüglich $\mathfrak{B}$ sind:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme $A \in \mathrm{Aut}(V)$ mit $M_1 = AL_1A^{-1}$ (*Tip: Basiswechsel durchführen*).
b) Bestimme $B \in \mathrm{Aut}(V)$ mit $M_2 = BL_2B^{-1}$.
c) Warum sind L_1, L_2, M_1 und M_2 nicht diagonalisierbar?

Aufgabe 7.2 L (Basiswechsel und Polynome)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Betrachte die Abbildung

$$L : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X], \quad L : P(X) \mapsto P(X + a)$$

a) Zeige, daß L ein Vektorraumisomorphismus ist.
b) Bestimme die Matrix von L bezüglich der Standardbasis $(1, X, \ldots, X^n)$.
c) Rechne die Determinante von L aus.
d) Bestimme das Charakteristische Polynom von L.

Aufgabe 7.3 L (Polynome und Endomorphismen)

Seien V ein K-Vektorraum, L ein Endomorphismus von V und sei $P(X) \in K[X]$ ein Polynom.
a) Zeige, daß für alle $S \in \mathrm{Aut}(V)$ gilt

$$P(SLS^{-1}) = S\ P(L)\ S^{-1}$$

b) Nimm an, daß L diagonalisierbar ist. Zeige, daß $P(L)$ auch diagonalisierbar ist.
c) Sei weiterhin L diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Berechne $\det(P(L))$.

Aufgabe 7.4 L (Orthogonale Endomorphismen II)

Sei alles wie in der Aufgabe "Orthogonale Endomorphismen I", also seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $L \in \mathrm{End}(V)$ eine Isometrie. Wir hatten gesehen, daß $M = L + L^{-1}$ ein symmetrischer Endomorphismus ist.
a) Sei v ein Eigenvektor von M. Zeige, daß $v, Lv, L^{-1}v$ linear abhängig sind.

b) Folgere aus a), daß der Spann von v und Lv ein L-invarianter Unterraum U der Dimension 1 oder 2 ist.
c) Zeige sorgfältig, daß das orthogonale Komplement von U auch L-invariant ist.

Aufgabe 7.5 A (Anwendung vom Umkehrsatz)

Sei $f(z) = z^n f_1(z)$ mit $f_1(0) = A \neq 0$.

a) Zeige, daß die Funktion $z \mapsto z^n$ in einer kleinen Umgebung von A eine differenzierbare Umkehrfunktion hat.
b) Folgere, daß es eine differenzierbare Funktion g gibt, mit $g(z)^n = f_1(z)$ für z in einem kleinen Ball von 0.
c) Folgere, daß das Bild von f einen kleinen Ball um $f(0) = 0$ enthält (*Tip: Schreibe f als Komposition der n-ten Potenz mit $z \mapsto z \cdot g(z) =: h(z)$; $h'(0) =?$*).

Aufgabe 7.6 A (Uneigentliche Integrale)

a) Zeige, daß $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x)dx > 0$ nicht existiert obwohl die Folge $(\int_0^{2\pi k} \sin(x)dx)_k$ konvergiert.
b) Zeige, daß die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$ stetig ist.
c) Zeige, daß die Folge $(a_k)_k$ mit

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$$

eine monoton fallende Nullfolge ist.
d) Zeige, daß

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx$$

existiert. Es ist **nicht** gefragt den Limes zu bestimmen! (*Bem.: Man muß zeigen, daß der Limes wirklich existiert, also zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $E > 0$ so daß $E \leq r \leq R \Rightarrow \left| \int_r^R \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \epsilon$. Eine Folge $R_k = 2\pi k$ wie in a) genügt nicht.*)

Aufgabe 7.7 A (Gamma Funktion)

Zeige für alle $2 \leq x, y \leq n$ die Ungleichungen

$$|a^{x-1}e^{-a} - a^{y-1}e^{-a}| \leq a^n e^{-a}|x - y| \quad \text{für } a \geq 1$$
$$|a^{x-1}e^{-a} - a^{y-1}e^{-a}| \leq |x - y| \quad \text{für } 0 \leq a \leq 1$$

Bem.: Wie wär's mit $t = a$?? Vergleiche mit der Vorlesung über die Gammafunktion!!

Aufgabe 7.8 A (Arcustangens)

a) Zeige, daß der Tangens tan das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet (*Tip: tan ist monoton*).
b) Sei arctan: $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ die Umkehrfunktion. Berechne ihr Taylorpolynom 5. Grades.

Mathematatik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Auch die Analysis-Aufgaben haben diesmal starke LA-Komponenten, damit Sie die Bearbeitung als Übung für die LA-Klausur ansehen.

Aufgabe 8.1 L (Invariante Unterräume)

Seien V ein K-Vektorraum, $L \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Ferner sei $U := Kern(L - \lambda \mathrm{id})^2$. Zeige, daß U invariant unter L ist.

Aufgabe 8.2 L (Ringe, Wiederholung aus der Vorlesung)

Seien V ein K-Vektorraum und $L \in \mathrm{End}(V)$. In der Vorlesung wurde ein wichtiger Ringhomomorphismus besprochen: $w_L \colon K[X] \to \mathrm{End}(V)$, $w_L(P) := P(L)$.

a) Zeige: $Kern(w_L) \neq 0$

b) Zeige, daß $Bild(w_L)$ ein Unterring von $\mathrm{End}(V)$ ist (Was wird ein "Unterring" wohl sein???).

c) Zeige: Für alle $P \in Kern(w_L)$ und $Q \in K[X]$ liegt $P \cdot Q$ in $Kern(w_L)$.

d) Zeige, daß für $P, Q \in Kern(w_L)$ der größte gemeinsame Teiler (g.g.T.) von P und Q auch im Kern liegt (*Tip: Euklidischer Algorithmus*).

e) Folgere, daß es ein Polynom $M_L \in K[X]$ gibt, so daß $Kern(w_L) = \{P \cdot M_L | P \in K[X]\}$.

Aufgabe 8.3 L (Quotientenring, repräsentantenweises Rechnen)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $I \subset R$ ($I \neq R$) eine Teilmenge so, daß für alle $x, y \in I$ gilt: $x - y \in I$. Außerdem sei für alle $x \in I$ und $r \in R$ auch $rx \in I$. Definiere für $x, y \in R$: $x \simeq y$ genau dann wenn $x - y \in I$.

a) Zeige, daß $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist. Bezeichne mit R/I die Menge der Äquivalenzklassen und durch $x \bmod I$ die Äquivalenzklasse von x. *Bem.: Vergleiche Aufg. 6.5.*

b) Zeige, daß die Summe $(x \bmod I) + (y \bmod I) := (x + y) \bmod I$ und die Multiplikation $(x \bmod I)\ (y \bmod I) := (x\ y) \bmod I$ wohldefiniert sind.

c) Zeige: Mit diesen beiden Operationen ist R/I ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 8.6 A (Lineare Vektorfelder, (warum heißen sie so?))

Betrachte die Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ deren Matrizen bezüglich der Standard-Basis folgendermaßen aussehen

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Skizziere die Vektorfelder $V_i(x) = A_i x$ mit $i = 1, 2, 3, 4$.

b) Berechne für $i = 1, 2, 3, 4$ und $t \in \mathbb{R}$ den Endomorphismus $\exp(tA_i)$.

c) Beschreibe das qualitative Verhalten der Kurven $\gamma_x(t) = \exp(tA_i)x$ mit $i = 1, 2, 3, 4$, $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere bestimme (mit Beweis), für welche x die Kurve $\gamma_x(t) = \exp(tA_i)x$ $(t > 0)$ beschränkt bleibt und für welche nicht.

Aufgabe 8.7 A (Lineare DGLn, (warum heißen sie so?))

Betrachte die Differentialgleichung

(DGL 1) $$y'' = ay + by'$$

Definiere $z = y'$. Dann betrachte die Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$

(DGL 2) $$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ ay + bz \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, daß mit zwei Lösungen auch jede Linearkombination von diesen wieder Lösung ist.

b) Zeige, wie Lösungen von (DGL 2) Lösungen von (DGL 1) liefern.

c) Schreibe die Lösungen von (DGL 2) mit dem Grenzwert der Exponentialreihe!

d) Löse (DGL 1) für $a = 1, b = 2$.

e) Formuliere Aussagen wie in a) und b) für Differentialgleichungen der Form
$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$

Aufgabe 8.8 A (Logarithmusreihe I, auch für Matrizen)

Betrachte die Funktion $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \log(1 + x)$.

a) Zeige mal wieder, daß das Taylorpolynom vom Grad k von f an der Stelle 0 gegeben ist durch
$$T_k(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} x^j / j$$

b) Zeige, daß die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} x^j / j$ für alle x mit $|x| < 1$ konvergiert.

c) Seien V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und L ein Endomorphismus. Nimm an, daß $\|L\|_\infty < 1$. Zeige, daß die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} L^j / j$ konvergiert.

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 9.1 (Gleichmäßige Konvergenz)

Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \sin(kt)$$

a) Zeige, daß die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert. Sei f der Limes.

b) Sei F_n für $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktion von f_n mit $F_n(0) = 0$. Zeige, daß die Folge $(F_n)_n$ auch gleichmäßig konvergiert. Bezeichne den Limes mit F.

c) Zeige, daß F eine Stammfunktion von f ist.

Aufgabe 9.2 (Lösungsverfahren: Variation der Konstanten)

Ziel dieser Aufgabe ist, Differentialgleichungen der Art $f'(x) = af'(x) + g(x)$ zu betrachten, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

a) Bestimme die Lösungen von $f_0' = af_0$.

b) Für gegebenes g löse $f'(x) = af'(x) + g(x)$ mit dem Ansatz $f(x) = h(x)f_0(x)$ (f_0 *wie in a)*), also bestimme h.

c) Finde alle Lösungen von $f'(x) + 2 \cdot f(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 9.3 (Orthogonale Endomorphismen in $\mathbb{R}^3$)

Diese Aufgabe sieht nur so aus wie eine Lineare Algebra Aufgabe. In Wirklichkeit gehört sie zum täglichen Leben. Auch zukünftige Analysisaufgaben werden einfacher, wenn man die Isometrien von $\mathbb{R}^3$ versteht.

Sei alles wie in den Aufgaben "Orthogonale Endomorphismen I,II", also seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $L \in \mathrm{End}(V)$ eine Isometrie.

a) Zeige, daß $\det(L)$ entweder $+1$ oder -1 ist.

Sei v ein Eigenvektor von $M = L + L^{-1}$. Wir haben gesehen, daß v und Lv einen L-invarianten Unterraum U aufspannen. Nächstes Ziel ist die Abbildung $L_{|_U} : U \to U$ zu beschreiben. (Bemerke, daß U entweder die Dimension 1 oder 2 hat).

b) Zeige: Wenn $\det(L_{|_U}) = -1$ dann ist $L_{|_U}$ diagonalisierbar.

c) Zeige: Wenn $\det(L_{|_U}) = 1$ dann ist $L_{|_U}$ eine Drehung. Bestimme die Matrix von $L_{|_U}$ bezüglich einer ON-Basis von U.

Jetzt geht es darum, Isometrien von $\mathbb{R}^3$ zu verstehen.

d) Zeige, daß L einen Eigenvektor v_0 mit dem Eigenwert 1 oder -1 hat.

e) Man weiß, daß das Orthogonale Komplement zu $\mathbb{R}v_0$ invariant unter L ist. Wähle eine ON-Basis von V so, daß der erste Vektor v_0 ist. Wie sieht jetzt die Matrix von L

bezüglich dieser Basis aus?

f) Sei $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben bezüglich der Standard Basis durch

$$L_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne $\det(L)$. Bestimme v_0 wie in d) und so eine ON-Basis wie in e). Bestimme die Matrix von L bezüglich dieser neuen Basis.

Aufgabe 9.4 (Richtungsableitungen)

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

a) Zeige, daß für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_{(x_0,y_0)}(t) = f(tx_0, ty_0)$ differenzierbar ist.

b) Zeige, daß die Funktion f **nicht** stetig ist. (*Tip: Was passiert wenn man $f(x, x^2)$ berechnet??*)

c) Beschreibe den Graph der Funktion f.

Aufgabe 9.5 (Logarithmusreihe II)

Sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|L\|_\infty < 1$. Zeige, daß die Funktion

$$(-1,1) \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n), \quad t \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(tL)^j}{j}$$

differenzierbar ist. Berechne die Ableitung in $t = 0$.

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 10.1 A (Polarkoordinaten)

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f\colon (x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$$

a) Begründe wieso f differenzierbar ist und berechne Tf.

Jetzt betrachte "Polarkooordinaten":

$$P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad P(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

b) Begründe wieso P differenzierbar ist und berechne TP.

c) Berechne mittels der Kettenregel $T(f \circ P)$.

d) Berechne **ohne** Kettenregel $T(f \circ P)$.

Aufgabe 10.2 A (Höhenlinien-Darstellung von Funktionsgraphen)

Betrachte die Funktionen

$$f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) = y^2 - x^2(1-x^2), \quad f_2(x,y) = y^2 - x^3 - x$$

a) Berechne Tf_1 und Tf_2.

b) Berechne die Gradienten von f_1 und f_2 (*Bem.: Ziel der Teilaufgabe b) ist zu merken, daß der Gradient ein Vektor und das Differential eine Lineare Abbildung sind.*)

c) Skizziere die Höhenlinien von f_1, f_2 (*Tip: Um die Höhenlinie zu f_i mit Höhe $h \in \mathbb{R}$ zu beschreiben, muß man so etwas wie $y^2 = (Polynom\ in\ x) + h$ lösen.*)

d) Zeichne die Gradienten von f_1, f_2 an den Stellen $1, 2, 3, 4$ und 5 in deine Skizze.

Aufgabe 10.3 a (Differenzierbarkeit von Matrix-Funktionen)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Fasse $\mathrm{End}(V)$ als einen $\mathbb{R}$-Vektorraum auf, wähle eine Norm mit $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ und betrachte die Abbildungen

$$F_1, F_2, F_2\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V), \quad F\colon A \mapsto A^j \ (j \in \{1,2,3\})$$

a) Zeige, daß F_j $(j = 1,2,3)$ differenzierbar ist und berechne TF_j.

b) Sei $Q(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ (beachte: Grad ≤ 3). Zeige, daß die Abbildung

$$Q\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V), \quad A \mapsto Q(A)$$

differenzierbar ist und berechne (zu jedem $Q(X)$) die Ableitung TQ.

Aufgabe 10.4 a (Unbeschränkte Funktionen, aber partiell beschränkt)

a) Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x+y)^2 e^{-(x-y)^2}$$

Zeige, daß f differenzierbar ist und berechne Tf.

b) Sei $t \to g(t) = a + t \cdot e_j \in \mathbb{R}^2,\ j = 1,2$ eine beliebige vertikale oder eine horizontale Gerade. Die Komposition $f \circ g$ heißt "Einschränkung von f auf die (betrachtete) Gerade". Zeige: Für jede horizontale oder vertikale Gerade ist die Einschränkung $f \circ g$ eine beschränkte Funktion.

c) Zeige, daß die Funktion f nicht beschränkt ist (*Tip: Was passiert in* $45°$*-Richtung?*); skizziere die Höhenlinien von f.

d) In b) haben wir über die vertikalen und die horizontalen Geraden gesprochen. Seien jetzt zwei beliebige Parallel-Scharen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ von Geraden gegeben (*Bem.: Also, zwei beliebige bedeutet insbesondere nicht, daß ihr die Geraden speziell wählen dürft!!*). Erfinde eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die unbeschränkt ist, aber eingeschränkt auf eine beliebige Gerade der Scharen $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_2$ beschränkt ist (*Großer Tip: Mit ein bißchen Linearer Algebra ist die Aufgabe ganz leicht!!!*).

Aufgabe 10.5 l Tutor a (Euklidische Dreiecke)

Sei Δ eine Dreieck mit Ecken A, B, C in der Euklidischen Ebene (z.B. in $\mathbb{R}^2$ mit standard Skalarprodukt). Wir verwenden die übliche Bezeichnung:

α ist der Winkel in A, β der in B und γ der in C

$a = B - A$ ist die gegenüberliegende Seite zur Ecke A, b die zu B und c die zu C

$|a|$ is die Länge von a, $|b|$ die von b und $|c|$ die von c

a) Definiere die Mittelsenkrechte zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^2$ und zeige, daß die (lineare!) Abbildung $Sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto -x \ + \ 2|P-Q|^{-2}\langle P-Q, x\rangle \cdot (P-Q)$ die Spiegelung an der Mittelsenkrechten ist.

b) Zeige, daß die drei Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten einen gemeinsamen Punkt M haben und daß für die Abstände gilt $|A-M| = |B-M| = |C-M|$.

c) Zeige (natürlich mit Hilfe des Skalarproduktes) die Formeln:

$$|c| = |a|\cos(\beta) + |b|\cos(\alpha) \qquad \text{(Projektionssatz)}$$

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a|\,|b|\cos(\gamma) \qquad \text{(Kosinussatz)}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{|a|} = \frac{\sin(\beta)}{|b|} = \frac{\sin(\gamma)}{|c|} \qquad \text{(Sinussatz)}$$

Erinnerung: Der Winkel ϕ zwischen zwei Vektoren $v, w \neq 0$ ist **definiert** durch

$$\cos\phi := \langle v, w\rangle / (|v| \cdot |w|)$$

d) Definiere und bestimme die Winkelhalbierende der zwei Geraden $g : t \to P + t \cdot v$, $h : t \to P + t \cdot w,\ |v| = |w| \neq 0$. Gib die Spiegelung an der Winkelhalbierenden an.

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Diese Woche Anmeldung zur Analysisklausur (15.7.)

Aufgabe 11.1 A (Umkehrsatz I)

Betrachte die Funktion:

$$F\colon \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) := z + \sum_{k\geq 2} a_k z^k, \quad (|a_z| \leq 1)$$

a) Obwohl man schon mehrmals gezeigt hat, daß $F(z)$ stetig und differenzierbar ist, zeige daß die Reihe konvergiert.

b) Zeige, daß die Funktion F an der Stelle 0 die Voraussetzngen des Umkehrsatzes erfüllt.

c) Obwohl man F^{-1} natürlich **nicht** bestimmen kann, bestimme die erste, die zweite und die dritte Ableitung von F^{-1} an der Stelle 0. (*Tip: Kettenregel*)

Aufgabe 11.2 A (Umkehrsatz II)

Betrachte die Funktion:

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (x^3 - y^2x - y, x^2 + xy + y^3 + x)$$

a) Berechne die partiellen Ableitungen von F.

b) Zeige, daß F differenzierbar ist und berechne $TF|_{(x,y)}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Zeige, daß F an der Stelle $(0,0)$ die Voraussetzungen vom Umkehrsatz erfüllt.

d) Berechne $T(F^{-1})|_{(0,0)}$.

Aufgabe 11.3 a (Schraubbewegung)

Betrachte folgende Abbildung

$$D\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad D\colon (x,t) \mapsto \left(\exp\begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

a) Berechne und skizziere den Vektorfeld

$$V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad V(x) := \frac{\partial D}{\partial t}(x,t)|_{t=0}$$

b) Betrachte für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ die Kurve $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_x\colon t \mapsto D(x,t)$ ("Schraublinie"). Zeige, daß γ_x Integralkurve von V ist.

c) Sei $g(s) = x + s \cdot v$ $(x, v \in \mathbb{R}^3)$ eine Gerade mit $g'(0) \perp V(g(0))$. Zeige, daß dann für alle s gilt: $\langle g'(s),\ V(g(s))\rangle = 0$. Das ist leichter zu rechnen als sich vorzustellen.

Aufgabe 11.4 A (Umkehrsatz III)

Betrachte die (ja differenzierbare) Funktion $F : \mathrm{End}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^d), F(A) := \frac{1}{2}A \cdot A$.

a) Berechne $TF|_{\mathrm{id}}$.

b) Folgere: Es gibt $r > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $G : B_r := \{X \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^d) \mid \|X - \mathrm{id}\| \leq r\} \to B_r$ mit $F \circ G(X) = X$. ($G(X)$ ist also eine Quadratwurzel aus X.)

Aufgabe 11.5 l (Sphärische Polarkoordinaten)

Betrachte die sphärischen Polarkoordinaten

$$F\colon (0,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad F(r,\phi) = (\sin(r)\cos(\phi), \sin(r)\sin(\phi), \cos(r))$$

a) Zeige, daß für alle (r,ϕ) der Punkt $F(r,\phi)$ auf der Einheitssphäre liegt. Beschreibe die Menge aller $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ so, daß es (r,ϕ) mit $F(r,\phi) = (x,y,z)$ gibt.

b) Wiederhole, daß der sphärische Abstand zwischen $F(r,\phi)$ und $(0,0,1)$ genau r ist.

c) Begründe wieso F differenzierbar ist und berechne TF.

d) Sei $c\colon [a,b] \to (0,\pi) \times \mathbb{R}$ eine Kurve. Berechne (Kettenregel): $(F \circ c)'$ und $(P \circ c)'$, wobei $P(r,\phi) = (r \cdot \cos\phi,\ r \cdot \sin\phi)$, vgl. Aufg. 10.1.

e) Folgere aus d), daß die Kurve $P \circ c$ **länger** als die Kurve $F \circ c$ ist.

Aufgabe 11.6 l (Sphärische Dreiecke)

Hier geht es darum sphärische und euklidische Dreiecke zu vergleichen.

Ziel: *Auf der Sphäre sind Dreieckswinkel grösser als in der Ebene.*

Voraussetzung ist, daß am 26.6. die Formeln der sphärischen Geometrie fertig behandelt wurden. Insbesondere wissen Sie dann, daß es zu drei Zahlen $a,b,c \in (0,\pi)$, dann ein sphärisches Dreieck (und natürlich auch ein euklidischhes Dreieck) mit diesen Seitenlängen gibt, wenn die Summe von je zweien dieser Zahlen größer als die dritte ist (drei Dreiecksungleichungen). Die den Seiten gegenüber liegenden Winkel heißen α,β,γ.

a) Formuliere den euklidischen und den sphärischen Kosinussatz (zur Berechnung von c aus a,b,γ). Zeige für beide Geometrien: Bei festem a,b ist die Funktion $\gamma \mapsto c = c(\gamma)$ monoton wachsend. ($c(\gamma)^2 = \ldots, \cos(c(\gamma)) = \ldots$)

b) Die Dreiecksseite c des euklidischen Dreiecks beschreiben wir als (nicht krumme) Kurve $t \mapsto c(t)$. Wähle die gegenüberliegende Ecke C als Zentrum von Polarkoordinaten und schreibe $c(t) = P(r(t),\phi(t))$.

c) Lege ein sphärisches Dreieck, gegeben durch a,γ,b, mit der Ecke C ins Zentrum der sphärischen Polarkoordinaten (11.4); dann verbindet die Kurve $t \mapsto F(r(t),\phi(t))$ die anderen Endpunkte der Seiten a,b. Begründe mit b) und 11.4, daß in diesem sphärischen Dreieck die C gegenüber liegende Seite nicht länger ist als die des euklidischen Dreiecks, auch gegeben durch a,γ,b.

d) Folgere aus a) und c) daß in einem sphärischen Dreieck mit den Seiten a,b,c der Winkel gegenüber c **größer** ist als in dem euklidischen Dreieck mit den Seiten a,b,c.

Mathematik II

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 12.1 A (Fundamentalsatz der Algebra)

Diese Aufgabe soll mit den Aufgaben 4.7, 6.4 und 7.5 verglichen werden. Es wurde alles auch in der Vorlesung besprochen. *Es ist auch eine gute Aufgabe, denn man wiederholt folgende Methoden*: **1)** Rechnen mit komplexer Zahlen (Teile b), e), f) und g)), **2)** Eigenschaften stetiger Funktionen (Teil h)) und **3)** Umkehrsatz für komplex-differenzierbare Funktionen (Teile a) und c)).

a) Sei $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Zeige, daß die Funktion $z \mapsto z^n$ in z_0 die Voraussetzungen des Umkehrsatzes erfüllt. Folgere, daß es eine kleine Umgebung U_0 von z_0^n gibt, auf der man eine differenzierbare Umkehrfunktion definieren kann.

b) Sei $f_0 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f_0(0) \neq 0$. Folgere aus a), daß es $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $z_1^n = f(0)$ und eine kleine Umgebung U_1 von z_1 gibt, so daß es eine *differenzierbare* Funktion $g \colon U_1 \to \mathbb{C}$ gibt mit $g(z)^n = f_0(z)$ für $z \in U_1$.

c) Sei g weiter wie in b). Zeige, daß die Funktion $z \mapsto zg(z)$ die Voraussetzungen des Umkehrsatzes für $z = 0$ erfüllt. Folgere, daß das Bild von $z \mapsto zg(z)$ einen kleinen Ball um 0 enthält.

d) Sei jetzt $F_0(z) = z^n f_0(z)$ mit f_0 wie in b). Zeige, daß auch das Bild von F_0 einen kleinen Ball um $0 = f(0)$ enthält.

Sei jetzt $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Wir wollen zeigen, daß P irgendwelche Nullstellen in $\mathbb{C}$ haben muß. Der Beweis wird indirekt sein, also **Annahme: P hat keine Nullstellen**. Betrachte dann die komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := (P(z))^{-1}$.

e) Zeige: Für $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt $f'(z_0) = 0$ genau dann wenn $P'(z_0) = 0$. Folgere, daß es dann eine Zahl n und eine Funktion f_0 gibt, so daß $f(z) = (z - z_0)^n f_0(z)$, wobei $f_0(z_0) \neq 0$.

f) Folgere aus e) und aus d), daß es für alle $z \in \mathbb{C}$ einen kleinen Ball um $f(z)$ gibt, der im Bild von f enthalten ist. Diese letzte Aussage bedeutet, daß es kein $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|f(z)| \leq |f(z_0)|$.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß unter der Annahme *"P hat keine Nullstellen"* ein Widerspruch folgt.

g) Sei $C := |f(1)|$. Bestimme aus den Koeffizienten von P eine Zahl $R \geq 1$ so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt: $|P(z)| \geq C^{-1}$. Also $|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \leq C$.

h) Die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ ist stetig, nimmt also ein Maximum C' auf dem kompakten Ball $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| \leq R\}$ an. Begründe wieso gilt: $C' = \max\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$. Insbesondere zeige: Es gibt $z \in \mathbb{C}$ mit $|f(z)|$ maximal.

Die Aussagen f) und h) widersprechen sich, also haben wir gezeigt, daß P eine Nullstelle haben muß.

Aufgabe 12.2 a (Stammfunktionen bestimmen)

Vergleiche mit den Aufgaben 2.5, 2.7, 5.7, 6.1 und 7.6. Finde Stammfunktionen zu:

$$f_1(x) = \cos(\sin(\sin(\sin(x)))) \cdot \cos(\sin(\sin(x))) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \quad f_3(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \log(x)\cos(x)$$

Aufgabe 12.3 a (Lineare DGL a) homogen, b) inhomogen)

Vergleiche mit den Aufgaben 8.6, 8.7, 9.2. Löse folgende Anfangswertaufgaben:

a) $f''(x) = 2f'(x) + 2f(x)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

b) $g'(x) = 3g(x) + e^x$ mit $g(0) = 1$. *Tip*: Erst homogene Gleichung $g'(x) = 3g(x)$ lösen.

Aufgabe 12.4 a (Umkehrsatz: Polarkoordinaten)

So wie in der Aufgabe 10.1 betrachte die Polarkoordinaten

$$P\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad P(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

a) Zeige, daß P surjectiv auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ist.

b) In der Aufgabe 10.1 wurde TP berechnet. Zeige, daß $TP|_{(r,\theta)} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ immer invertierbar ist.

c) Zeige, daß P die Voraussetzungen vom Umkehrsatz für alle $(r,\theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ erfüllt. Insbesondere folgere, daß es für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $U_{(x,y)}$ gibt, so daß man eine Umkehrfunktion $P^{-1}\colon U_{(x,y)} \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ findet.

d) Man könnte denken, daß es eine Umkehrfunktion $P^{-1}\colon \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ gibt. Zeige, daß das **nicht** der Fall ist (*Tip: Zeige, daß P nicht injektiv ist!!*).

Aufgabe 12.5 L (Regelflächen, das sind Flächen mit einer Geradenschar)

Betrachte in $\mathbb{R}^3$ die Menge

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

a) Skizziere H.

b) Zeige, daß H durch Drehungen D_α, mit dem Winkel α um die z-Achse, in sich selbst überführt wird. Verbessere die Skizze a).

c) Zeige, daß die zwei Geraden $g_\pm(t) = e_1 + t(e_2 \pm e_3)$ in H enthalten sind. Verbessere damit a).

d) Zeige, daß für jedes $\alpha \in (0, 2\pi)$ die Geraden g und $D_\alpha g$ windschief (d.h.: nicht parallel und nicht schneidend) zueinander sind.

e) Zeige: Für jeden Punkt $(x,y,z) \in H$ gibt es genau ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, mit $(x,y,z) \in D_\alpha g_+$, und ebenso mit g_-.

Also hat man, daß durch jeden Punkt der krummen Fläche H zwei Geraden gehen, die auf H liegen.

SS 2000 10.6.2000

Mathematik I Klausur (Lineare Algebra)

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 1 (Definitionen) Sei K ein Körper.

a) Schreibe die Axiome für einen K-Vektorraum auf. 4-P.

b) Sei V ein K-Vektorraum. Für eine Menge $X \subset V$ formuliere die Definitionen von: 1) X ist linear abhängig, 2) X ist linear unabhängig und 3) Spann von X. 6-P.

c) Sei $(1, X, X^2)$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}_2[X]$. Zeige, daß es keine Lineare Abbildung $L: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ gibt so daß $L(1) = 2X + X^2$, $L(X^2) = 1 + 5X$, $L(3 - 5X + X^2) = -9 + 10X + 3X^2$ und $L(X) = 2$ 4-P.

Aufgabe 2 (Auswertungsabbildungen) 10-P.

Seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und betrachte für $i = 1, \ldots, 4$ die Auswertungsabbildung w_i an der Stelle a_i. Zeige, daß es für alle $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ genau ein Polynom $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ mit $b_i = w_i(P)$ gibt.

Aufgabe 3 (Gleichungssysteme)

Sei $L: U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Für $v \in V$ betrachte das Gleichungssystem $Lu = v$ auf U.

a) Formuliere die Definition von Rang von L. 2-P.

b) Welche Bedingung muß L erfüllen, damit es für jedes $v \in V$ 1) höchstens und 2) mindestens eine Lösung gibt. 4-P.

Seien jetzt e_1, e_2, e_3 eine Basis von V und $L': V \to V$ gegeben durch

$$L'(e_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3,\ L'(e_2) = 4e_1 + 0e_2 + 5e_3,\ L'(e_3) = 5e_1 + 2e_2 + 8e_3$$

c) Berechne den Rang von L'. 4-P.

d) Bestimme die Menge aller $b \in V$ so, daß das Gleichungssystem $L'x = b$ mindestens eine Lösung hat. 4-P.

e) Bestimme die Menge aller $b \in V$ so daß das Gleichungssystem $(L' + Id)x = b$ mindestens eine Lösung hat. 4-P.

Aufgabe 4 (Induktion) 10-P.

Seien $A, B: V \to V$ kommutierende Endomorphismen eines $\mathbb{R}$-Vektorraums. Zeige für $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Aufgabe 5 (Diagonalisierbare Matrizen) 12-P.

Begründe, welche der folgenden Matrizen diagonalisierbar sind.
Es ist **nicht** gefragt, die Diagonalform herzustellen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (Determinanten) 12-P.

Seien V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und e_1, e_2, e_3, e_4 eine Basis von V. Betrachte die Endomorphismen von V, deren Matrizen in der gegebenen Basis sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 & 1 \\ 11 & 22 & 44 & 33 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = C^t$$

Berechne $\det(A), \det(B), \det(C), \det(C\ D), \det(B\ C^{-1})$ und $\det(C^2 - C)$.

Aufgabe 7 (Endomorphismen) 8-P.

Seien V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und e_1, e_2, e_3 eine Basis von V. Betrachte den Endomorphismus von V, dessen Matrix in der gegebenen Basis ist:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Matrix des Endomorphismus $(L - Id) \circ (L - 2\ Id)$ bezüglich der gleichen Basis.

Aufgabe 8 (Dimension)

Sei V ein K-Vektorraum.

a) Wie ist die Dimension von V definiert? 2-P.
b) Was ist die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(K^2, K^3)$? Gib eine Basis an. 3-P.
c) Was ist die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(K^4, K)$? Gib eine Basis an. 3-P.

Aufgabe 9 (Permutationen)

a) Formuliere die Definition von Permutation. 2-P.
b) Sei $\sigma = (1, 4, 5, 8) \in \mathfrak{S}_9$. Berechne Signum von σ. 3-P.
c) Sei jetzt $\tau \in \mathfrak{S}_9$. Beweise: Signum von $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ ist gleich Signum von σ. 3-P.

SS 2000 15.7.2000

Mathematik II Klausur (Analysis)

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 1 (Normen) 3+3+5+4=15 Pkt.

3.5 Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

a) Schreibe die Axiome einer Norm $|\cdot|$ auf V auf.

b) Seien $L \in \mathrm{End}(V)$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Begründe, daß die Funktion

$$\{v \in V | \; \|v\| = 1\} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|Av\|$$

ein Maximum annimmt.

c) Zeige, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathrm{End}(V)$ definiert, wobei

$$\|L\|_\infty := \max_{v \in V, \|v\|=1} \|Lv\|$$

d) Zeige für alle $L, L' \in \mathrm{End}(V)$, daß $\|L \circ L'\|_\infty \leq \|L\|_\infty \cdot \|L'\|_\infty$ gilt.

Aufgabe 2 (Stetigkeit) 3+5=8 Pkt.

a) Formuliere eine Definition von: $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ ist stetig an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

b) Zeige (mit der Definition aus a): Wenn $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig ist an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $f(x_0) > 0$, dann gibt es einen Ball B um x_0 so daß für alle $x \in B$ gilt: $f(x) > 0$.

Aufgabe 3 (Rest für die Taylorformel) 8+5=13 Pkt.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal *stetig* differenzierbar und sei $T_2(x)$ das Taylor Polynom von Grad 2 an der Stelle 0.

a) Zeige, daß für alle $x \in [0, 1)$ gilt

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \int_0^x \left(\int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} |f^{(3)}(t_3)| dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1$$

b) Folgere für alle $x \in [0, 1)$:

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{x^3}{3!} \sup_{t \in [0,1]} |f^{(3)}(t)|$$

Aufgabe 4 (Lineare DGL) 12 Pkt.

Bestimme **alle** Lösungen $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y' &= y + z \\ z' &= z \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Integrale) 3+6+3=12 Pkt.

a) Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ stetig differenzierbar und $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Bestimme eine Stammfunktion zu $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := f'(x)/f(x)$.

b) Bestimme Stammfunktionen für folgende Funktionen.

$$f_1(x) = \sin(x)\cos(x), \quad f_2(x) = \frac{1}{x\log(x)} \quad \text{und} \quad f_3(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

c) Berechne $\int_3^4 f_i(x)dx$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 6 (Harmonische Reihe) 8 Pkt.

Zeige für alle $n > 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1} \geq \log(n+1) - \log(2)$$

Aufgabe 7 (Gleichmäßige Konvergenz) 4+6=10 Pkt.

a) Formuliere die Definition von: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeige: Die Folge

$$f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sin(kt)$$

konvergiert gleichmäßig.

Aufgabe 8 (Umkehrsatz) 6+2+4=12 Pkt.

a) Formuliere den Umkehrsatz für Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Gib die Ableitung der Umkehrfunktion an.

b) Begründe: Wieso gilt für alle $z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) \neq 0$.

c) Zeige, daß die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f: z \mapsto e^z$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ die Voraussetzungen des Umkehrsatzes erfüllt und berechne die Ableitung einer Umkehrfunktion.

Aufgabe 9 (Ableitungen) 4+6=10 Pkt.

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

a) Formuliere die Definition von:
$Tf|_{x_0} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist die Ableitung von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

b) Begründe wieso

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 - x^2(1-z^2) \\ z^2 - y^3 - x \end{pmatrix}$$

differenzierbar ist und berechne das Differential Tf.