Flächeninhalte und Volumina

Da die Diskussion von Flächeninhalten und Volumina in der Hochschulmathematik sehr viel aufwendiger ist, als in der Schulmathematik, möchte ich erklären, warum das so ist und was geeignete Anfangsvoraussetzungen für die Schule sind.

Das leitende Ziel in der Hochschuldiskussion ist: Man möchte Definitionen haben, aus denen Grenzwertsätze mit schwachen Voraussetzungen und starken Behauptungen bewiesen werden können. In den Voraussetzungen stehen Folgen von Mengen M_n, deren k-dimensionale Volumina $\mathrm{vol}(M_n)$ definiert sind und die in geeigneter Weise einen Grenzwert $M_\infty = \lim M_n$ haben. Behauptet wird: $\mathrm{vol}(M_\infty) = \lim \mathrm{vol}(M_n)$.

Offensichtlich spielt dies Ziel auf der Schule keine Rolle.

Die Mathematiker beweisen dann auch die sogenannte "Bewegungsinvarianz" der k-dimensionalen Volumina. Damit ist gemeint, dass Mengen, die durch Bewegungen aus einander hervorgehen, dasselbe Volumen haben. Es verursacht keinerlei Probleme, wenn auf der Schule die Bewegungsinvarianz von Flächeninhalten und 3-dimensionalen Volumina als selbstverständlich vorausgesetzt wird. Da ich falten und spiegeln so betont habe, führe ich das fort und setze voraus: *Ebene Figuren und ihre Spiegelbilder haben denselben Flächeninhalt* und *3-dimensionale Körper und ihre Spiegelbilder haben dasselbe Volumen.*

Sodann benötigt man einen Anfang. Da wir die Bewegungsinvarianz voraussetzen, ist der Anfang: *Alle Quadrate mit Seitenlänge 1 ("Einheitsquadrate") haben den Flächeninhalt 1.*

Als erstes soll die Formel für den **Flächeninhalt von Rechtecken** hergeleitet werden. Dazu muss noch formuliert werden, welche Eigenschaften von dem Flächeninhalt "axiomatisch" erwartet werden.

Haupteigenschaft des Flächeninhalts:

M_1 und M_2 seien zwei ebene Mengen, für die der Flächeninhalt ("area") schon bekannt ist. Dann soll auch $M_1 \cup M_2$ einen Flächeninhalt haben und es soll gelten

$$\mathrm{area}(M_1 \cup M_2) \le \mathrm{area}(M_1) + \mathrm{area}(M_2).$$

Sind M_1, M_2 zusätzlich ohne gemeinsame Punkte, also $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so soll gelten

$$\mathrm{area}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{area}(M_1) + \mathrm{area}(M_2).$$

Im Prinzip können wir allein hiermit schon einen Zerlegungsbeweis für den Satz des Pythagoras führen. Noch nicht in der Form $a^2 + b^2 = c^2$, weil wir ja erst besprechen wollen, wie Flächeninhalte durch Formeln ausgedrückt werden können, aber doch so:

Die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate
ist gleich der Fläche des Hypotenusenquadrates.

Wenn man genau hinsieht, überlappen sich beim Zusammenlegen der Teilstücke deren Ränder und die formulierte Haupteigenschaft sagt zunächst nicht, wie man damit umgehen soll. Lehrende in der Schule dürfen natürlich mitteilen, dass der Flächeninhalt von Rändern null ist. Aber wenn eine Diskussion darüber entsteht, sollten sie wissen, wie das vor über 2000 Jahren behandelt wurde. Dazu erinnere ich an die Archimedes Eigenschaft der reellen Zahlen (auch: Eudoxos Axiom):

Eudoxos: Es gibt keine reelle Zahl $r > 0$, die kleiner als alle Stammbrüche ist.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 0 \le r \le 1/n \Rightarrow r = 0.$$

Das wurde damals so benutzt: Wenn man für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Strecke mit einer Fläche überdecken kann, deren Inhalt $\le 1/n$ ist, dann muss die Strecke den Flächeninhalt null haben.

Woher bekommt man "kleine" Flächen, um so eine Überdeckung herzustellen? Da man bisher nur das Einheitsquadrat hat, wird man seine Seiten in n Teile teilen und versuchen, das Einheitsquadrat aus n^2 dieser kleinen Quadrate zusammenzusetzen. Da sich auch dabei die Ränder überlappen, müssen wir etwas sorgfältiger vorgehen: Wir nehmen etwas kleinere Quadrate, also mit der Kantenlänge $q/n,\ 0.9 < q < 1$. Von diesen bringen wir leicht n^2 Stück **ohne Überlappung** im Einheitsquadrat unter. Nun sagt die Haupteigenschaft: Die kleinen Quadrate müssen einen Flächeninhalt $\leq 1/n^2$ haben, weil ja alle n^2 zusammen das Einheitsquadrat **nicht** vollständig überdecken!
Eine Strecke der Länge L kann ohne Mühe mit $2L \cdot n$ dieser kleinen Quadrate überdeckt werden, also mit einer Gesamtfläche $\leq 2L/n$ – und für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen des Eudoxos Axioms kann der Flächeninhalt der Strecke nur null sein.
Ein weiterer kleiner Umweg ist nötig: Da beliebte Beweise des Strahlensatzes Formeln für Flächeninhalte benutzen, müssen wir zur Vermeidung von Zirkelschlüssen hier auf den Strahlensatz verzichten. Aber, die einzige mir bekannte Konstruktion zur Teilung einer Strecke in n gleiche Teile benutzt den Strahlensatz. Wir können jedoch mit Hilfe der Konstruktion von Mittelsenkrechten Strecken halbieren, also auch oft halbieren. Wir benutzen daher in der vorhergehenden Überdeckung nur solche kleinen Quadrate, deren Seitenlängen wir durch häufiges Halbieren der Seite des Einheitsquadrates erhalten. Damit ist dann das Problem mit den Rändern gelöst:

Geradlinige Ränder stören bei der Bestimmung von Flächeninhalten nicht.
Quadrate der Kantenlänge $1/m$ haben den Flächeninhalt $1/m^2$, wie am Anfang erwartet.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir endlich zum Flächeninhalt von Rechtecken. Sind die Seitenlängen a, b ganze Zahlen $a = j, b = k$, so kann das Rechteck mit $a \cdot b$ Einheitsquadraten so gepflastert werden, dass sich nur Ränder überlappen, der Flächeninhalt ist also $a \cdot b \cdot 1$. Das ist völlig analog zu dem üblichen Anfang der Flächenlehre durch Abzählen von Kästchen.
Da wir weiter den Strahlensatz vermeiden wollen, können wir nur Rechtecke betrachten, deren Seitenlängen sogenannte "dyadische" Brüche sind: $a = j/2^n, b = k/2^n$. Wir können also mit Quadraten der Seitenlänge 2^{-n} sowohl das Einheitsquadrat wie das Rechteck pflastern. Zum Pflastern des Einheitsquadrates braucht man 2^{2n} Stück. Ich wiederhole: *Die Haupteigenschaft liefert für diese Quadrate den Flächeninhalt 2^{-2n}.* Zum Pflastern des Rechtecks braucht man $j \cdot k$ Stück, also ist der Flächeninhalt

$$\text{area}(a \times b) = j \cdot k \cdot 2^{-2n} = a \cdot b.$$

Die Ausdehnung dieser **Inhaltsformel auf alle reellen Seitenlängen** gelingt wieder mit dem Eudoxos Axiom und damit, dass jede reelle Zahl r von oben und unten durch dyadische Brüche approximiert werden kann. Hier die antike Schlussweise:
Zu jedem Rechteck mit den eventuell irrationalen Seitenlängen r, s gibt es also ein darin enthaltenes Rechteck mit den dyadischen Seitenlängen $a_n < r,\ b_n < s$ und ein umfassendes Rechteck mit dyadischen Seitenlängen $A_n > r,\ B_n > s$ und $A_n \cdot B_n - a_n \cdot b_n \leq 1/n$. Wegen $a_n \cdot b_n < r \cdot s < A_n \cdot B_n$ und $a_n \cdot b_n < \text{area}(r \times s) < A_n \cdot B_n$ folgt, dass der Flächeninhalt des $r \times s$-Rechtecks $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ von $r \cdot s$ höchstens um $1/n$ abweicht, so dass mit Archimedes gilt:

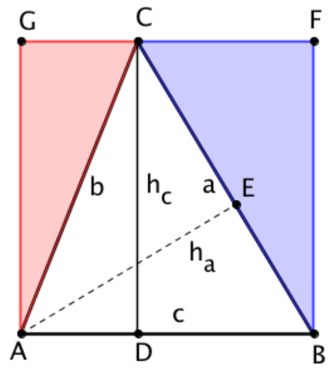
$$\text{area}(r \times s) = r \cdot s.$$

Diese **antike Vorstufe von Grenzwertargumenten** ist also in allen Flächeninhaltsformeln enthalten. Ich finde, das sollte wenigstens bei einer Gelegenheit vorgeführt werden.

Flächeninhalte von Dreiecken, Parallelogrammen und Trapezen

Die herzuleitenden Formeln entstehen nicht mehr durch direkten Vergleich mit dem Einheitsquadrat. Jede Figur wird zerschnitten und die Teile zu einem **Rechteck** wieder zusammengesetzt, das wegen der zitierten Haupteigenschaft denselben Flächeninhalt wie die ursprüngliche Figur hat. Die Schülerinnen und Schüler erleben kein weiteres Mal explizit, dass das Eudoxos Axiom für alle Flächeninhaltsformeln benutzt wurde. Daher muss das Axiom bei der Behandlung der Rechtecke deutlich genug vorkommen.

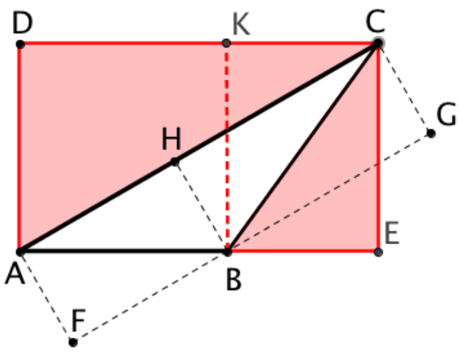
Für **Dreiecke** ABC wird das mit dieser Zeichnung erklärt: Zerschneide das Dreieck mit der Höhe h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke ADC, CDB und rotiere diese um die Mittelpunkte ihrer Hypotenusen um $180°$ in die gefärbten Positionen. Man erhält so das Rechteck $ABFG$ mit den Seitenlängen c, h_c. Sein Flächeninhalt $c \cdot h_c$ ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks: $\textit{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} c \cdot h_c$. Da viele Schülerinnen und Schüler diese Formel als *Definition* des Inhalts der Dreiecksfläche ansehen werden, sollten sie prüfen können, dass sie mit der Höhe h_a dasselbe Ergebnis erhalten. Zerschneide dazu ABC mit beiden Höhen in vier Teile. Mit diesen 4 Teilen kann man ABC sowohl zu dem h_c-Rechteck wie dem h_a-Rechteck, ergänzen.



Allerdings muss man **stumpfwinklige Dreiecke** noch einmal extra ansehen.

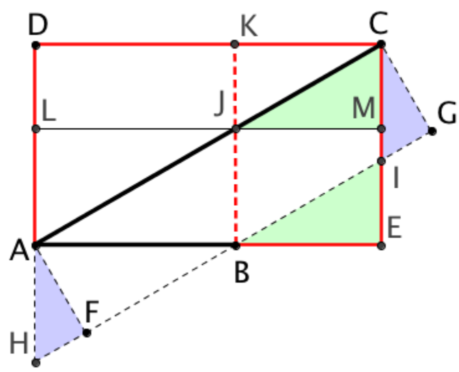
Wie eben erhält man mit der inneren Höhe BH auf der **längsten** Seite AC das Rechteck $CAFG$ mit dem doppelten Flächeninhalt $b \cdot h_b$. Die beiden anderen Höhen liegen außerhalb des Dreiecks. Z.B. ist CE Höhe h_c zur Seite AB und die Fläche von ABC ist Differenz der Dreiecksflächen AEC und BEC, so dass wieder die Formel $\textit{Dreiecksfläche} = \textit{Grundlinie} \times \textit{Höhe}\,/2$ gilt. **Nach** Behandlung des Strahlensatzes kann man die Flächengleichheit der Rechtecke $CAFG$ und $ABKD$ in einer Zeile nachrechnen mit der Definition von

$$\sin\alpha := \textit{Gegenkathete/Hypotenuse}, \text{ nämlich: } b \cdot h_b = b \cdot c \cdot \sin\alpha = c \cdot h_c.$$

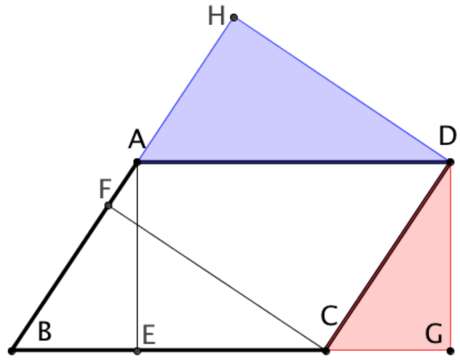


Ich finde jedoch, dass bei diesem Erstkontakt mit Flächenihalten nur die direkt aus der Haupteigenschaft folgenden Zerschneidungsbeweise die gewünschte Überzeugungskraft haben, auch wenn mir für diesen Fall nur ein etwas komplizierterer Beweis eingefallen ist:

Die vorherige Zeichnung muss in zwei Schritten verändert werden. Schneide von dem Rechteck $AFGC$ das Dreieck CIG ab und verschiebe es nach AHF. Das Dreieck AHB ist kongruent zu dem Dreieck LAJ. So wird auch das Dreieck JMC abgeschnitten und nach BEI verschoben. Die behauptete Flächengleichheit der Rechtecke $ABKD$ und $AFGC$ ist damit äquivalent zur Flächengleichheit der neuen Rechtecke $LJKD$ und $BEMJ$. Damit ist eine berühmte, Gnomon genannte Figur erreicht: Das Rechteck $AECD$ wird durch die Diagonale AC halbiert und von jeder Hälfte werden zwei jeweils kongruente Dreiecke abgezogen. Dabei entstehen die **flächengleichen** Rechtecke $LJKD$ und $BEMJ$, wie behauptet.



Für **Parallelogramme** ist die Situation ähnlich. Zuerst betrachten wir Parallelogramme, für die beide Höhen im Inneren liegen. Mit der Höhe AE wird das Dreieck ABE abgeschnitten und in die rote Position DCG verschoben. Das flächengleiche Rechteck $AEGD$ hat die gleichen Seitenlängen wie Grundlinie und Höhe. Dasselbe wird mit der anderen Höhe CF gemacht: Das Dreieck BCF wird in die blaue Position verschoben und liefert das flächengleiche Rechteck $CDHF$. Die beiden Höhen zerlegen das Parallelogramm in 4 Teile, so dass beide Rechtecke aus diesen vier Teilen zusammengefügt werden können. Die Formel



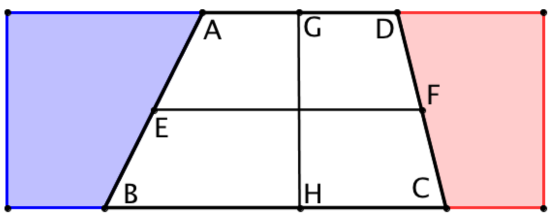
$$\textit{Parallelogrammfläche} = \textit{Grundlinie} \times \textit{Höhe}$$

liefert also in beiden Fällen dasselbe Ergebnis.

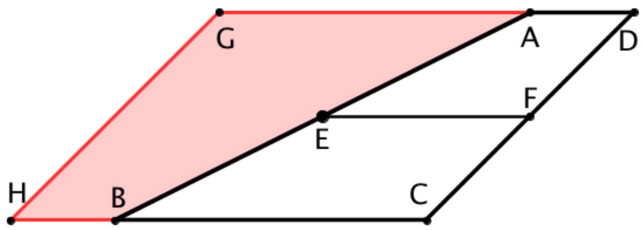
Nicht alle Parallelograme sind so übersichtlich. Verlängert man etwa die Seite BC genügend, so liegt der Fußpunkt F des Lotes von C auf die Gerade AB außerhalb des Parallelogramms und der Flächenvergleich mit Rechtecken führt wie bei Dreiecken auf die Differenz von Rechtecken. Die Mathematik hat sich so entwickelt, dass auf bereits erhaltenen Ergebnissen aufgebaut wird, statt immer bis auf die Anfänge zurückzugehen. Dreiecke haben wir auch schon nicht mit dem Einheitsquadrat, sondern mit dem ersten Resultat, mit Rechtecken, verglichen. **Jedes** Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei kongruente Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe wie das Parallelogramm zerlegt, so dass man *ohne Fallunterscheidung* die Flächenformel der Parallelogramme aus der für Dreiecke erhält.

Auch bei den **Trapezen** gibt es "einfache", die direkt mit Rechtecken verglichen werden können und "schiefere", bei denen das nicht geht. Alle Trapeze werden jedoch durch eine 180°-Drehung um einen Endpunkt der Mittellinie zu einem Parallelogramm doppelter Fläche und gleicher Höhe ergänzt. Das ergibt ohne Fallunterscheidung

$$\textit{Trapezfläche} = \textit{Länge der Mittellinie} \times \textit{Höhe}$$



Vergleich mit doppelt so großem Rechteck
GH: gemeinsames Lot der parallelen Seiten



Das Trapez ABCD ohne innere Höhe wird
durch Rotation um E zum Parallelogramm

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir, dass **Drachen** durch ihre Diagonalen in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden. Daraus folgt:

$$\textit{Drachenfläche} = \textit{Diagonalenprodukt}/2.$$

Die Flächenformeln für Dreiecke und die besprochenen Vierecke werden so oft benutzt – und wohl meistens, nachdem ihre Herleitung vergessen ist – dass etwas Aufwand bei der Begründung dieser Formeln wichtig ist.

Weitere häufig benutzte Formeln für andere **gradlinig begrenzte Flächen** gibt es nicht. Sie werden durch Zerschneiden in Dreiecke behandelt. Für ebene Flächen gibt es einen allgemeinen Begriff, der sowohl einfach wie besonders nützlich ist:

Eine Teilmenge M der Ebene heißt **konvex**, wenn die Verbindungsstrecke von je zwei Punkten $P, Q \in M$ ganz in M liegt, $PQ \subset M$.

Eine stückweise gradlinig berandete konvexe Menge heißt *konvexes Vieleck* oder *konvexes Polygon*. Diese können besonders einfach in Dreiecke zerschnitten werden: Die Verbindungsstrecke von einer Ecke mit der übernächsten Ecke schneidet von einem Vieleck mit n Ecken ein Dreieck so ab, dass ein konvexes Vieleck mit $n-1$ Ecken übrig bleibt. Nach $n-3$ Schritten bleibt dann ein Dreieck übrig, das n-Eck wurde also in $n-2$ Dreiecke zerschnitten. Zum Beispiel ist deshalb die*Innenwinkelsumme* eines konvexen n-Ecks $(n-2) \cdot 180°$.

Ein Hauptergebnis für konvexe Vielecke mit sehr einfachem Beweis ist folgender

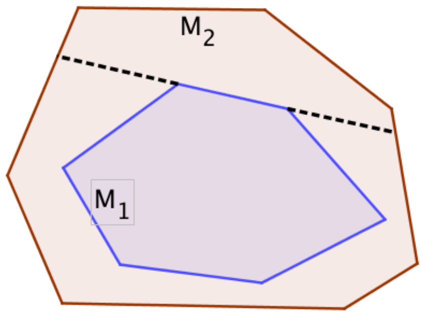
Satz: Ist ein konvexes Vieleck M_1 in einem anderen konvexen Vieleck M_2 enthalten, $M_1 \subset M_2$, so hat M_1 den kleineren Umfang: $\text{Umfang}(M_1) \leq \text{Umfang}(M_2)$.

Späteres Beispiel: Bei der Behandlung der trigonometrischen Funktionen folgt die wichtige Ungleichung $x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq x \leq \tan x$ aus diesem Satz.

Wegen der Haupteigenschaft (Seite 1) des Flächeninhalts gilt natürlich auch

$$\text{area}(M_1) \leq \text{area}(M_2).$$

Der **Beweis** benutzt nur die Dreiecksungleichung und wiederholt denselben Schritt so oft, wie M_1 Seiten hat: Eine Seite von M_1 wird verlängert, bis sie in beiden Richtungen den Rand von M_2 trifft. Diese Strecke teilt M_2 in zwei konvexe Polygone, die beide kleineren Umfang als M_2 haben, weil die Strecke **kürzeste** Verbindung ihrer Endpunkte ist. M_1 liegt auf einer Seite der abschneidenden Strecke und wir ersetzen M_2 durch den Teil von M_2 in dem M_1 liegt.



So wird in endlich vielen Schritten M_2 **umfangsverkürzend** in M_1 verwandelt.

Um die Konsequenzen dieses Satzes zu illustrieren, zitiere ich eine **beeindruckende Verallgemeinerung**, die aber nicht zur Elementargeometrie gehört, weil ihre Begründung Analysis benutzt:

Für jede konvexe Menge M, die in ein ausreichend großes Quadrat passt, gilt: Für den Rand ∂M von M - auch *konvexe Kurve* genannt, kann mit Hilfe einbeschriebener konvexer Polygone die Länge von $\partial M = \text{Umfang}(M)$ wie folgt **definiert** werden:

$\boxed{\text{Umfang}(M) := \textit{kleinste obere Schranke der Längen einbeschriebener konvexer Polygone.}}$

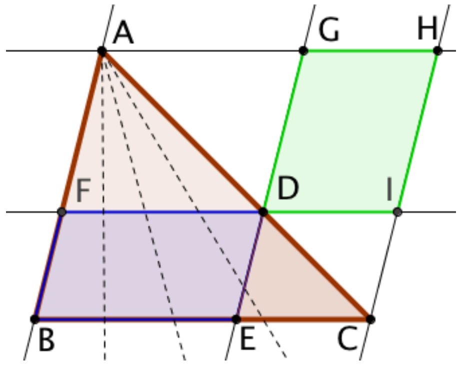
Das ist eine zulässige Definition, weil die Längen der einbeschriebenen Polygone eine obere Schranke haben - die Länge des umfassenden Quadrates.

Mit dieser Längendefinition gilt der Beweis des obigen Vergleichssatzes wörtlich genauso für beliebige äußere konvexe Mengen M_2. Ist auch die innere konvexe Menge M_1 beliebig, so gilt der Vergleichssatz zunächst für jedes in M_1 einbeschriebene konvexe Polygon. Die Längendefinition dehnt dann die Gültigkeit des Satzes von den in M_1 einbeschriebenen konvexen Polygonen auf M_1 aus. – So viel zur späteren Entwicklung dieses Satzes.

Der Strahlensatz mit Flächenformeln

Nachdem die vorhergehenden Flächenformeln ohne Zitieren des Strahlensatzes hergeleitet wurden, kann jetzt der Strahlensatz mit diesen Formeln bewiesen werden.

Gegeben ist das Dreieck ABC und ein Teilpunkt D auf der Seite AC.

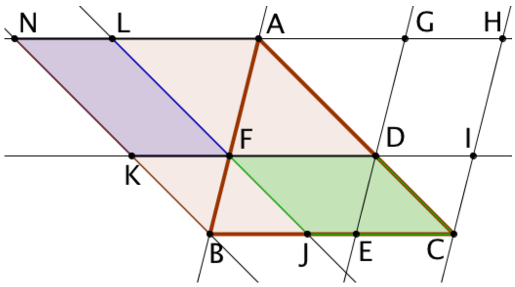


Gesucht sind Punkte E auf BC und F auf AB so, dass sie die Seiten AB und BC im selben Verhältnis teilen wie D die Strecke AC. – *Warum heißt das* **"Strahlensatz"?** Weil alle von A ausgehenden (punktierten) "Strahlen" von den beiden Parallelen FD, BC im gleichen Verhältnis $|AD| : |AC|$ geteilt werden. Wir beweisen das für die zwei Strahlen AB, AC.
Dazu wird erstens das Dreieck ABC zum Parallelogramm $ABCH$ ergänzt. Die Parallele durch D zu AB schneidet BC in E und die Parallele durch D zu BC schneidet AB in F. Die Diagonale AC teilt die drei Parallelogramme $ABCH$, $AFDG, DECI$ in kongruente Hälften. Daher sind die Parallelogramme $FBED$ und $GDIH$ **flächengleich** ("Gnomon Figur").
Die drei Paralllelogramme $FBCI, FBED, DECI$ haben dieselbe Höhe. Mit der **Flächenformel für Parallelogramme** folgt, dass die drei Flächeninhalte sich wie die Längen der Grundseiten BC, BE, EC verhalten. Dasselbe gilt für die drei Parallelogramme $ECHG$, $DIHG, ECDI$ mit den Grundseiten CH, IH, CI. Da die Flächeninhalte der ersten drei Parallelogramme mit den Inhalten der zweiten drei **übereinstimmen**, haben wir folgende Proportionen für die Längen ihrer Grundseiten BC, BE, EC bzw. CH, IH, CI:

$$|BC| : |BE| : |EC| = |CH| : |IH| : |CI| = |AB| : |AF| : |FB|.$$

Mit anderen Worten: Für die drei Dreiecke ABC, AFD, DEC stimmen die Verhältnisse der Seiten, die nicht auf der Strecke AC liegen überein:

$$|AB| : |BC| = |AF| : |FD| = |DE| : |EC|.$$



Um auch die dritten Seiten AC, AD, DC zu dieser Proportionskette hinzuzufügen, müssen wir die Rolle von D und F vertauschen, d.h. wir müssen das Dreieck ABC zum Parallelogramm $BCAN$ mit Diagonale AB ergänzen und die Parallele zu AC durch F mit BC in J schneiden. Dann sind wie eben die Parallelogramme $NKFL$ und $FJCD$ **flächengleich** (Gnomon Figur) und es folgt wie eben das Streckenverhältnis $|AC| : |AD| = |BC| : |JC| = |BC| : |FD|$.

Mit anderen Worten: Alle in dieser Figur auftretenden Dreiecke haben nach dem Stufenwinkelsatz gleiche Winkel und nach dem vorgeführten Beweis gleiche Längenverhältnisse ihrer drei Seiten. Daran ändert sich auch nichts, wenn die Dreiecke aus dieser Figur heraus in andere Positionen gedreht oder verschoben werden. Daher fassen wir zusammen:

Stimmen die Winkel zweier Dreiecke überein, so sind
auch die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich.
Solche Paare von Dreiecken heißen "ähnliche Dreiecke".

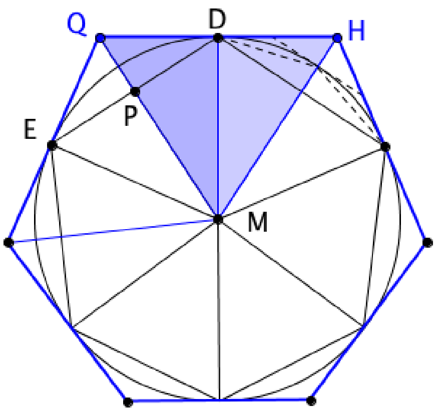
Umfang und Fläche von Kreisen

Da der Kreis zu den einfachsten geometrischen Figuren gehört, möchte man über Umfang und Inhalt mit möglichst einfachen Argumenten reden. Am leichtesten erreichbar ist die schon in der Antike bekannte – und π nicht enthaltende – Beziehung

$$\textit{Kreisfläche} = \textit{Radius} \times \textit{Kreisumfang}/2.$$

Wohl von Anfang an wurde der Kreis mit einbeschriebenen *Sehnen*-Vielecken und umbeschriebenen *Tangenten*-Vielecken verglichen. Für Tangentenvielecke, also für Vielecke, deren Seiten alle einen festen Kreis berühren, gilt: Die Verbindungen von den Ecken zum Mittelpunkt zerlegen das Vieleck in Dreiecke, die alle den *Kreisradius als Höhe* haben. Daher gilt für **Tangentenvielecke**:

$$\textit{Fläche} = \textit{Radius} \times \textit{Umfang}/2.$$



Tangentenpolygon:
Fläche = Radius×Umfang/2

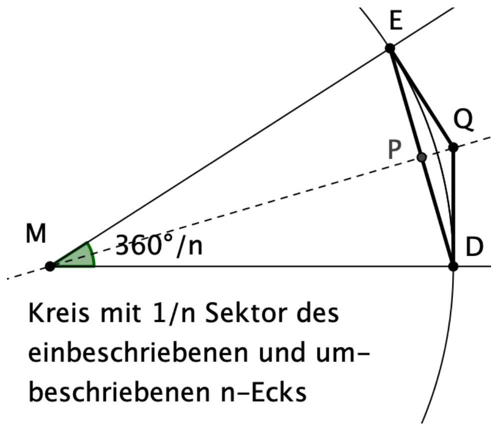
Wir vergleichen Kreise mit regulären einbeschriebenen und umbeschriebenen n-Ecken, die durch Eckenverdopplungen aus dem Sechseck entstehen, die also nach m Verdopplungen $n = 6 \cdot 2^m$ Ecken haben. Die einbeschriebenen Vielecke werden mit v_n bezeichnet, die umbeschriebenen mit V_n. Da sie in einander enthalten sind gilt:

$$\textit{Fläche}(v_n) \leq \textit{Kreisfläche} \leq \textit{Fläche}(V_n),$$

und wegen des Längenvergleichssatzes (Seite 6) für konvexe Kurven gilt auch

$$\textit{Umfang}(v_n) \leq \textit{Kreisumfang} \leq \textit{Umfang}(V_n).$$

Da v_n und V_n ähnlich sind, wird als nächstes der Vergrößerungsfaktor von v_n nach V_n ausgerechnet.



Kreis mit 1/n Sektor des einbeschriebenen und umbeschriebenen n-Ecks

Die Umkreisradien von V_n, v_n sind $|MQ|$, $|ME| := 1$. Der Vergrößerungsfaktor ist also nach Pythagoras

$$|MQ| : |ME| = |MQ| = \sqrt{1 + |QE|^2}.$$

Für das Seckseck V_6 ist $|QE_6| = 1/\sqrt{3} \leq 1$. Die Umfänge der V_n nehmen mit n ab und die Eckenzahl verdoppelt sich bei jedem Schritt. Daher gilt

$$|QE_{2n}| \leq |QE_n|/2, \; |QE_n| \leq |QE_6| \cdot 2^{-m} \leq 6/n.$$

Nach m Verdopplungen ist der Vergrößerungsfaktor

$$\sqrt{1 + |QE_n|^2} \leq \sqrt{1 + 36/n^2} \leq 1 + 18/n^2.$$

Deshalb wissen wir jetzt, wie nahe die oberen und unteren Schranken zusammenrücken:

$$\textit{Fläche}(v_n) \leq \textit{Kreisfläche} \leq \textit{Fläche}(V_n) \leq \textit{Fläche}(v_n) \cdot (1 + \frac{36}{n^2}),$$

$$\textit{Umfang}(v_n) \leq \textit{Kreisumfang} \leq \textit{Umfang}(V_n) \leq \textit{Umfang}(v_n) \cdot (1 + \frac{18}{n^2}).$$

Da wir für die Tangentenvielecke die Beziehung *Fläche* $=$ *Radius* $\times$ *Umfang*$/2$ schon kennen, schreiben wir diese Ungleichungen so um, dass diese Beziehung für den Kreis folgt.

Den Fehlerterm vereinfachen wir damit, dass Umfang und Fläche des umbeschriebenen Sechsecks obere Schranken für die Daten aller anderen Vielecke sind. Der Unterschied zwischen den äussersten Termen in den bewiesenen Ungleichungsketten ist eine Schranke für die Differenz der mittleren Terme. Damit

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \mathit{Fläche}(V_n) - \mathit{Kreisfläche} \quad \leq \mathit{Fläche}(V_6) \cdot \frac{36}{n^2} \\ 0 \leq\ & \mathit{Umfang}(V_n) - \mathit{Kreisumfang} \leq \mathit{Umfang}(V_6) \cdot \frac{18}{n^2} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird mit $\mathit{Radius}/2$ multipliziert und von der ersten Gleichung abgezogen. Dabei wird noch benutzt $\mathit{Fläche}(V_n) - \mathit{Umfang}(V_n) \cdot \mathit{Radius}/2 = 0$. Schlussergebnis:

$$-\mathit{Fläche}(V_6) \cdot \frac{18}{n^2} \leq \mathit{Kreisumfang} \cdot \mathit{Radius}/2 - \mathit{Kreisfläche} \leq \mathit{Fläche}(V_6) \cdot \frac{36}{n^2}$$

Trotz dieser Arbeit haben wir Kreisumfang und Kreisfläche nicht berechnet sondern nur approximiert. Aber nun liefert das Eudoxos Axiom die Behauptung:

$$\mathit{Kreisfläche} = \mathit{Radius} \times \mathit{Kreisumfang}/2.$$

So nahe war die Antike an den Grenzwerten!

Natürlich möchte man nicht nur diese Beziehung zwischen Fläche, Radius und Umfang wissen, sondern auch, wie groß Fläche und Umfang bei gegebenem Radius denn nun sind. Wegen des Strahlensatzes ist der Umfang proportional zum Radius, $U(r) = 2 \cdot \mathit{const} \cdot r$ und wegen der eben hergeleiteten Beziehung folgt für die Fläche $A(r) = \mathit{const} \cdot r^2$. Das sieht zunächst harmlos aus, aber die zu bestimmende Konstante - die den Namen π bekommen hat - ist keine rationale Zahl, wir können sie daher nur approximieren. Dazu sind die oben aufgeschriebenen Schachtelungsungleichungen für Umfang und Fläche, etwa

Länge einbeschriebener Polygone $\leq$ *Kreisumfang* $\leq$ *Länge umbeschriebener Polygone,*

gut geeignet.

Die dabei auftretende Konstante π ist nicht nur irrational, sie kann auf keine Weise mit Hilfe rationaler Funktionen berechnet werden. Bis man die trigonometrischen Funktionen kennen gelernt hat, gibt es nur die Möglichkeit, durch Ausrechnen von Polygonen, die dem Einheitskreis ein- oder umbeschrieben sind, Approximationen für π zu gewinnen. Später bietet die Analysis andere Möglichkeiten, z.B. mit der ersten positiven Nullstelle der Sinusfunktion: $\sin(\pi) = 0$.

Historische Bemerkung. Archimedes hat, vom Sechseck ausgehend, die Umfänge für 5 Verdoppelungen gerechnet, um die Abschätzung $3\frac{10}{71} \leq \pi \leq 3\frac{10}{70}$ zu gewinnen ($\frac{10}{70} - \frac{10}{71} \approx 0.002$).

Dass der erste Versuch, den Flächeninhalt einer gekrümmt berandeten Figur zu berechnen, nur mit einer Approximation endet, kann man als Enttäuschung sehen. Vielleicht ist es klug, wenigstens ein weiteres Beispiel zu behandeln. Die Parabel ist zwar als Kurve komplizierter als der Kreis, aber den Flächeninhalt eines Parabelabschnitts zu berechnen ist einfacher als die Berechnung der Kreisfläche und außerdem ist das Ergebnis explizit.
Da die Kreis**fläche** mit Parabelbögen viel besser als mit Strecken approximiert werden

kann, liefert die Verwendung der 5 Verdopplungen des Archimedes zusammen mit dem Flächeninhalt von Parabelabschnitten eine viel genauere Abschätzung von π, als er mit Sehnenpolygonen erzielt hat.
Schon mit dem Zwölfeck erreicht man ungefähr Archimedes' Genauigkeit.

Berechnung der Eckenverdopplung

Bisher wurden die Umfänge der Vielecke nicht berechnet. Eine Abschätzung der Differenz zwischen den Umfängen der einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecke folgte schon daraus, dass die Seiten des umbeschriebenen Vielecks bei jeder Eckenverdopplung etwas kürzer als halb so lang werden. Diese Umfänge sollen jetzt nicht abgeschätzt sondern möglichst genau berechnet werden. Grundsätzlich sind das Rechnungen an rechtwinkligen Dreiecken. Diese sind am übersichtlichen, wenn wir trigonometrische Notation verwenden. Dabei ist jedoch $\sin\alpha$ nicht der Wert einer reellen Funktion sondern bezeichnet nur ein Verhältnis im rechtwinkligen Dreieck: $\sin\alpha = a/c$, $\cos\alpha = b/c$. Für regelmäßige n-Ecke sei $\alpha := 360°/n$. Dann gilt im Einheitskreis für die **Seitenlängen** der $1/n$-Sektoren

der einbeschriebenen Vielecke $s_{2n} = 2\sin(\alpha/2),\ s_6 = 1$ und
der umbeschriebenen Vielecke $S_{2n} = 2\tan(\alpha/2),\ S_6 = 2/\sqrt{3}$.

Die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) \text{ und } \cos(\alpha) = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) = 2\cos^2(\alpha/2) - 1$$

beschreiben, wie man Winkel verdoppelt. Diese Formeln können leicht invertiert werden:

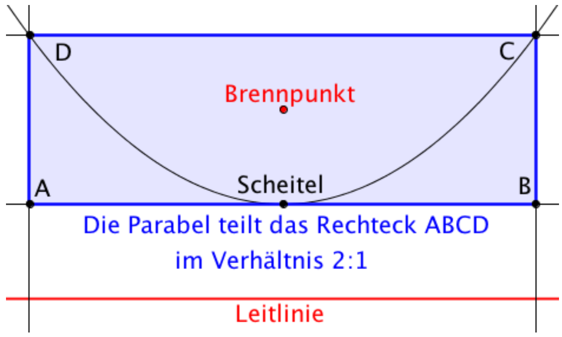
$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}},\ \sin(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha/2)},\ \tan(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2},$$

$$\cos(\pi/12) = \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^{1/2},\ \sin(\pi/12) = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^{1/2},\ \tan(\pi/12) = 2-\sqrt{3}.$$

Mit diesen Halbierungsformeln wird die Eckenverdopplung der Sehnen- und Tangentenvielecke gerechnet. Ich wiederhole, dass die trigonometrischen Ausdrücke hier nicht als trigonometrische Funktionen auftreten, sondern dass sie die Verhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken übersichtlicher beschreiben als mit Hilfe von *Namen* für alle auftretenden Streckenlängen.
Archimedes musste also für seine ein- und umbeschrieben 96-Ecke bei jedem Verdopplungsschritt **ohne Taschenrechner** eine Quadratwurzel und zwei Quotienten mit großer Genauigkeit bestimmen. Da er sowieso mit Brüchen arbeitete, waren die Quotienten kein Problem, aber er musste ausreichend gute rationale Approximationen für die Quadratwurzeln finden.

Eine Abschweifung: Beginn der Integralrechnung vor mehr als 2200 Jahren
Von der geometrischen Definition zum Flächeninhalt von Parabelsegmenten

Als Beginn der Integralrechnung werden Arbeiten von Archimedes (287 - 212 v.Chr.), insbesondere seine Bestimmung des Flächeninhalts der Parabel, angesehen. Er bewies, dass die Parabel den Flächeninhalt des gezeichneten Rechtecks aus Sehne und einem Stück der Scheiteltangente im Verhältnis 2:1 teilt. – Die Differentialrechnung blieb bis zu Newton unzugänglich.

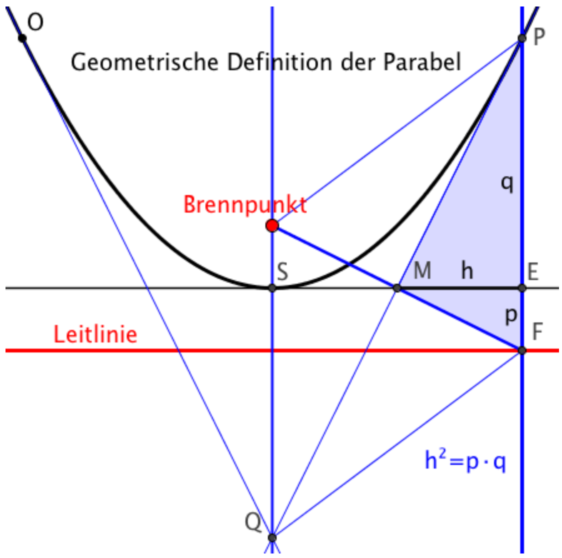


In der Schulmathematik kommen Flächeninhalte von krummlinig berandeten Figuren nach dem Kreis erst wieder in der Integralrechnung vor, allerdings fast nur als “Stammfunktionsintegral”. Deshalb lohnt der Blick zurück.

Geometrische Definition: Eine Parabel ist der geometrische Ort aller der Punkte, die von einer Geraden - genannt *Leitlinie* - und einem Punkt - genannt *Brennpunkt* - **gleich weit entfernt** sind.
Konstruktion: Um auf dem Lot der Leitlinie in F den Parabelpunkt P zu finden, beachte, dass für alle Punkte des Lotes der nächste Punkt auf der Leitlinie der gewählte Fußpunkt F ist. Deshalb liegt P auf der Mittelsenkrechten der Strecke vom Brennpunkt B nach F. – In dem rechtwinkligen Dreieck PMF ist die Höhe $h = |ME| = \frac{1}{2}|SE|$; der Hyothenusenabschnitt $p = |EF| = |BS|$ ist konstant; der andere Hypothenusenabschnitt $q = |PE|$ ist die Höhe von P über der Scheiteltangente. Nach dem **Höhensatz** gilt

$$p \cdot q = h^2.$$

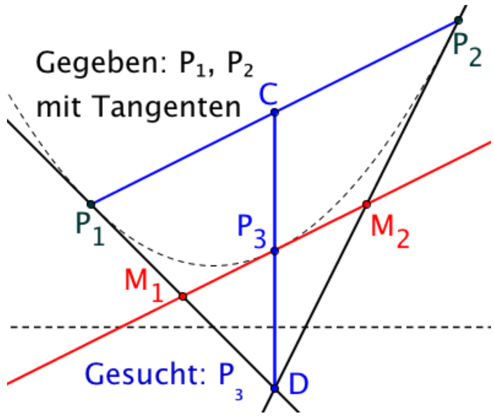
(In der Parabelliteratur ist p der Abstand zwischen Brennpunkt und Leitlinie, also doppelt so groß.)



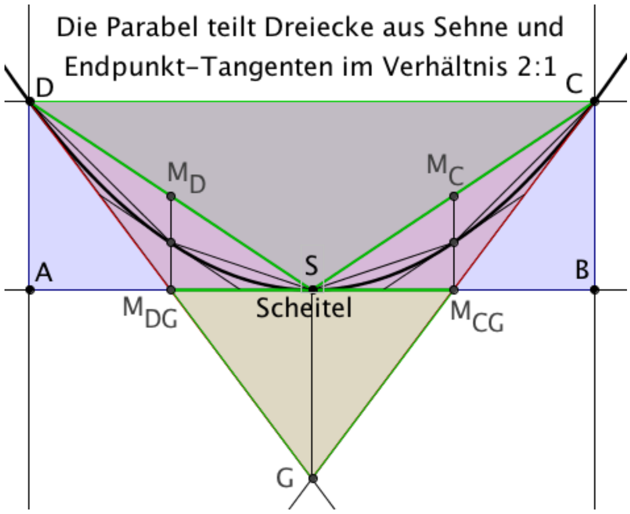
In moderner Terminologie ist diese Parabel also Graph der Funktion $f(x) = x^2/4p$.

Schließlich, *warum ist die Mittelsenkrechte Tangente der Parabel?* Alle Punkte der Mittelsenkrechten sind gleich weit von F und vom Brennpunkt entfernt, aber nur P liegt *senkrecht* über F. Deshalb sind alle anderen Punkte der Mittelsenkrechten **näher** an der Leitlinie als am Brennpunkt. Die Parabel liegt daher **auf einer Seite** der Mittelsenkrechten. Aus der Antike ist mir keine bessere Tangentendefinition bekannt.

Um die **2:1** Flächenteilung des Archimedes zu beweisen, benötigen wir eine **Halbierungseigenschaft** der Parabel, mit der sie an Einfachheit den Kreis deutlich übertrifft. **Gegeben** sind zwei Punkte P_1, P_2 mit Tangenten. Gesucht sind weitere Punkte, mit Tangenten.
Die Gerade durch den Schnittpunkt D der Tangenten und den Mittelpunkt C der Sehne P_1P_2 ist **parallel zur Parabelachse** und der Mittelpunkt P_3 der Strecke CD **ist ein Parabelpunkt**.
Die **Tangente** in P_3 ist parallel zur Sehne P_1P_2 und sie halbiert daher die Strecken DP_1 und DP_2.
Wir zeigen zuerst die Anwendung auf die Flächenteilung.

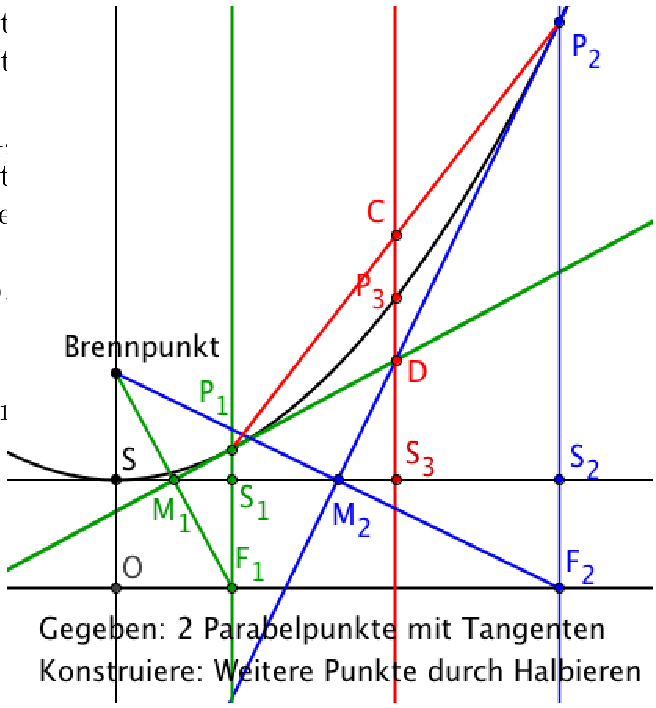


Beweis der 2:1 Teilung:
Da der Scheitel in der Mitte zwischen Tangentenschnittpunkt G und Sehne CD liegt, hat das Sehnen-Tangentendreieck CDG dieselbe Fläche $|F|$ wie das Rechteck $ABCD$. Das der Parabel einbeschriebene Dreieck CDS hat eine halb so große Fläche $\frac{1}{2}|F|$. Das von der Scheiteltangente abgeschnittene äußere Dreieck $M_{CG}M_{DG}G$ hat die Fläche $\frac{1}{4}|F|$. Die Parabel liegt nun in zwei kleineren Sehnen-Tangentendreiecken, jedes mit Fläche $\frac{1}{8}|F|$. — Beide Tangentenschnittpunkte, M_{CG}, M_{DG}, liegen wegen der *Halbierungseigenschaft* der Parabel senkrecht unter den Mittelpunkten M_C, M_D ihrer Sehnen. Deshalb kann man wie im ersten Schritt ein inneres Sehnendreieck und ein äußeres **halb so großes** Tangentendreieck herausnehmen, so dass vier Restdreiecke mit Fäche $\frac{1}{32}|F|$ die Parabel enthalten. Dies Verfahren wird fortgesetzt. Bei jedem Schritt wird aus dem Inneren **doppelt** so viel Fläche herausgenommen, wie aus dem Äußeren. Und die Fläche, die die Parabel enthält, wird geviertelt. Das Verhältnis der Summe aller inneren zur Summe aller äußeren Dreiecksflächen ist also **2:1**. Archimedes argumentierte: Wenn die Parabel nicht im Verhältnis $2:1$ teilt, entsteht nach **endlich vielen** Schritten ein Widerspruch. Wir können auch die Geometrische Reihe summieren: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{4}{3}$ und erhalten innerhalb der Parabel die Fläche $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot |F| = \frac{2}{3}|F|$.



Beweis der Halbierungseigenschaft

Gegeben: Die Punkte P_1, P_2 mit Tangenten (grün, blau). Konstruiert wird P_3 (rot) so:



Die Verbindungsstrecke CD vom Sehnenmittelpunkt C zum Schnittpunkt D der Tangenten ist parallel zur Parabelachse; der neue Punkt P_3 ist Mittelpunkt von CD.

Beweis: In der Antike gab es keine Koordinaten, aber der Text ist heute leichter lesbar, wenn nicht die Strecken Namen haben, sondern die Punkte Koordinaten: $S = (0, 0), O = (0, -p)$, $M_1 = (a, 0), S_1 = (2a, 0), M_2 = (b, 0), S_2 = (2b, 0)$. Höhensatz: $P_1 = (2a, a^2/p),\ P_2 = (2b, b^2/p)$. So weit die gegebenen Daten. Wähle $S_3 := (a + b, 0)$ in der Mitte zwischen S_1 und S_2. Dann liegen die Sehnenmitte

$$C = \frac{P_1 + P_2}{2} = (a + b, \frac{a^2 + b^2}{2p})$$

und der Parabelpunkt (wieder der Höhensatz:)

$$P_3 = (a + b, (\frac{a + b}{2})^2/p)$$

auf der Parallelen zur Achse durch S_3 (rot).

Argumentiert werden muss nur, dass die beiden Tangenten die Vertikale S_3P_3 im gleichen Punkt

$$D = (a + b, a \cdot b/p),$$

schneiden. Wie das in der Antike formuliert worden ist, weiß ich nicht. Heute benutzen wir Steigdreiecke mit $m_j := |S_jP_j| : |S_jM_j|$. Die Tangente bei P_1 hat dier Steigung $m_1 = a/p$, die Tangente bei P_2 hat die Steigung $m_2 = b/p$. Wegen $|M_1S_3| = b$ ist $|DS_3| = m_1 \cdot b = a \cdot b/p$ und wegen $|M_2S_3| = a$ trifft auch die andere Tangente die Vertikale S_3P_3 in derselbe Höhe $m_2 \cdot a = a \cdot b/p$.
Der Mittelpunkt aus Sehnenmitte C und Tangentenschnittpunkt D ist daher P_3:

$$(|S_3C| + |S_3D|)/2 = \tfrac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + 2ab)/p = |S_3P_3|.$$

Schließlich hat die Tangente in P_3 die Steigung $m_3 = \frac{a+b}{2}/p$ und das ist auch die Steigung der Sehne: $(b^2/p - a^2/p)/(2b - 2a) = (a + b)/2p$.

Für später: Abschätzung von π mit Parabelflächen

Es ist plausibel, dass sich ein Kreisbogen durch einen Parabelbogen besser approximieren läßt als durch eine Sehne. Da Archimedes den Flächeninhalt von Parabelabschnitten berechnet hat, kann man spekulieren, ob er mit Flächeninhalten bessere Approximationen für π als mit Sehnenpolygonen hätte erhalten können. Man kann sich vorstellen, dass eine Parabel einen Kreis von außen in zwei Punkten $C, D = (\pm\sin\alpha, \cos\alpha)$ berührt, indem man einen Kreis von oben in eine Parabel fallen läßt. Ebenso kann man sich vorstellen, dass eine steile Parabel mit ihrem Scheitel im tiefsten Kreispunkt von innen berührt und weiter oben den Kreis schneidend verläßt, z.B. in C, D. Man kann Gleichungen dieser Parabeln leicht angeben, aber ich weiß nicht, mit welchen Mitteln der Antike man zeigen kann, dass sie innerhalb bzw. außerhalb verlaufen. – Zur π-Bestimmung müssen die Koordinaten von C, D durch Eckenverdopplung bestimmt werden – $\sin\alpha, \cos\alpha$ sind nur Bezeichnungen.

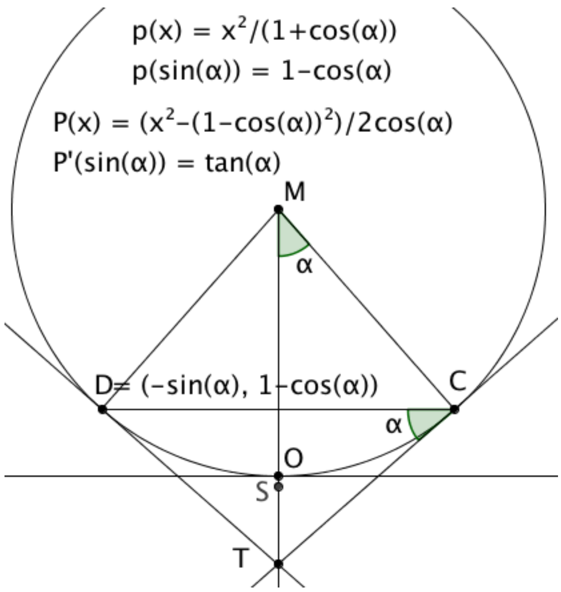
Der Kreisbogen DC wird von innen mit der Parabel

$$p(x) = x^2/(1+\cos\alpha)$$

approximiert und von außen mit der Parabel

$$P(x) = (x^2 - (1-\cos\alpha)^2)/2\cos\alpha.$$

Beide Parabeln gehen durch $C = (\sin\alpha, \cos\alpha)$ und D. Sie sind symmetrisch zur Achse OM und für große $|x|$ sind sie außerhalb des Kreises $x^2 + (y-1)^2 = 1$.
Wegen $P'(\sin\alpha) = \tan\alpha$ berührt P den Kreis in C und D. Da P nicht mehr als vier Punkte mit dem Kreis gemeinsam haben kann, liegt P **außerhalb** des Kreises. p berührt den Kreis im Ursprung O und hat damit ebenfalls vier Punkte mit dem Kreis gemeinsam; wegen $p'(\sin\alpha) < \tan\alpha$ schneidet p den Kreis in C und D von innen nach außen und liegt daher für $|x| \le \sin\alpha$ **innerhalb** des Kreises. – (S ist Scheitel von P.)
Die Fläche α des Kreissektors MDC kann mit dem Dreieck MDC und den Parabelflächen unter der Sehne DC nach oben und unten abgeschätzt werden.



Wir benutzen die 2:1 Flächenteilung des Archimedes, im Falle der inneren Parabel vergleichen wir mit dem Rechteck zur Sehne CD, im Fall der äußeren Parabel vergleichen wir mit dem Dreieck CDT, das dieselbe Fläche wie das Rechteck hat.

$$\textit{Innere Fläche} = f(\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \frac{2}{3}\cdot 2\sin\alpha\cdot(1-\cos(\alpha) = \frac{4}{3}\sin(\alpha) - \frac{\sin(2\alpha)}{6}$$

$$\textit{Äußere Fläche} = F(\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \frac{2}{3}\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\tan(\alpha) = \tan(\alpha)(1-\frac{\sin^2(\alpha)}{3})$$

$$f(\alpha) \le \textit{Sektorfläche} = \alpha \le F(\alpha)$$

$$\begin{aligned} F(\alpha) - f(\alpha) &= \frac{2}{3}\cdot\sin^3(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{2}{1+\cos(\alpha)}\right) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\sin^5(\alpha)\cdot\frac{1}{\cos(\alpha)(1+\cos(\alpha))^2} \\ &\le \frac{1}{5.6}\cdot\sin^5(\alpha) \le 0.00021 \quad (\text{für } \alpha \le \pi/12). \end{aligned}$$