

Geometrie auf der Kugeloberfläche - Sphärische Geometrie

1. Warum Sphärische Geometrie?

Es gibt sowohl praktische wie allgemeinbildende Gründe, sich für die sphärische Geometrie zu interessieren. Erstens leben wir auf einer Kugeloberfläche. – Sodann werden Teile der 3-dimensionalen Euklidischen Geometrie durch die 2-dimensionale sphärische Geometrie anschaulicher und rechnerisch einfacher beschrieben. Etwa: Für eine quadratische Pyramide mit gegebener Grundseite und Höhe lassen sich die Winkel der dreieckigen Flächen leicht ausrechnen, die Winkel zwischen diesen Flächen sind jedoch euklidisch mühsam, sphärisch dagegen in einer Zeile zu bestimmen (S. 3 unten). Oder: Projiziert man ein Ikosaeder vom Mittelpunkt auf die Umkugel (normiert auf Radius 1), so erhält man ein Netz aus gleichseitigen sphärischen Dreiecken, deren Winkel $72^\circ = 2\pi/5$ betragen. Ihr sphärischer Flächeninhalt (S. 15) ist *Winkelsumme* $-\pi = \pi/5$. Daher braucht man 20 solcher Dreiecke um die Fläche 4π der Sphäre auszufüllen - eine Überlegung, die in Abschnitt 4 für alle Platonischen Körper gemacht wird. – Verbreitet ist auch ein großes Interesse an der Kosmologie und ihren gekrümmten Räumen. Man kann nicht anfangen, diese angemessen zu erklären, wenn man nicht wenigstens eine andere als die Euklidische Geometrie kennen gelernt hat. Wir nehmen die Sphäre als eine im Euklidischen Raum gebogene Fläche wahr, aber die sphärische Geometrie erklärt auch (wenigstens an diesem 2-dimensionalen Beispiel), was mit "Krümmung" in der Kosmologie eigentlich gemeint ist.

2. Abstände auf der Kugeloberfläche.

Auf allen Flächen im \mathbb{R}^3 kann man natürlich als Abstand zwischen ihren Punkten den Abstand nehmen, den die Punkte im \mathbb{R}^3 haben. Das haben die Menschen auf der Erdoberfläche nie gemacht, sie waren an dem Abstand interessiert, den man *auf der Erdoberfläche* zurücklegen muss. Das erkläre ich zunächst nicht ganz endgültig: Die Kugel ist symmetrisch zu jeder Ebene durch ihren Mittelpunkt O und diese Ebenen schneiden die Kugel in sogenannten *Großkreisen*. Diese Kreise haben mit den Geraden der Ebene gemeinsam, dass sie aus Fixpunkten der zugehörigen Spiegelung bestehen. Außerdem können je zwei Punkte A, B durch einen Teilbogen eines Großkreises verbunden werden: Schneide die Kugel mit der Ebene durch A, B und den Mittelpunkt O der Kugel. Ich verschiebe den Nachweis, dass diese Großkreisbögen *kürzeste Verbindungskurven* auf der Kugeloberfläche sind (Abschnitt 8), da ich zunächst ohne Differentialrechnung auskommen möchte. Wir nehmen also als Abstand zwischen A und B – vorausgreifend – die **Länge** des Großkreisbogens zwischen A, B . Das berechnen wir auf der Kugel vom Radius 1, d.h.

$$\text{Abstand}(A, B) := \text{Winkelmaß}(\angle AOB).$$

Das erlaubt, die Punkte der Sphäre mit *geographischen Koordinaten* zu beschreiben: Jeder Punkt P besitzt auf dem Meridian, der ihn mit dem Nordpol verbindet, einen Polabstand ϑ , der sich wie die Radiuskoordinate r von Polarkoordinaten in der Ebene verhält. Ein Meridian wird als *Nullmeridian* ausgezeichnet, die anderen werden mit dem Winkel φ , den sie im Nordpol mit dem Nullmeridian bilden, festgelegt:

$$P = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2$$

Ein Kreis vom sphärischen Radius ϑ um den Punkt $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{S}^2$ ist der Schnitt der Sphäre mit der Ebene $\{\vec{x} := (x, y, z); m_1 \cdot x + m_2 \cdot y + m_3 \cdot z = \vec{m} \bullet \vec{x} = \cos \vartheta\}$.

3. Sphärische Dreiecke

(Alle Beweise lassen sich in der hyperbolischen Geometrie nachmachen.)

Wir legen jetzt ein Dreieck mit der Ecke A in den Nordpol, mit der Ecke B auf den Nullmeridian und mit der Ecke C so, dass die Meridiane durch B und C den Winkel α bilden. Die Seitenlängen seien $a, b, c \in [0, \pi]$ und die Winkel bei B, C seien wie üblich β, γ . Schließlich ist Sp die Spiegelung, die A und B vertauscht:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sin c \\ 0 \\ \cos c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \sin b \cdot \cos \alpha \\ \sin b \cdot \sin \alpha \\ \cos b \end{pmatrix}, Sp = \begin{pmatrix} -\cos c & 0 & \sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix}$$

Die Herleitung der sphärischen Dreiecksformeln besteht nun einfach darin, dass der Punkt $Sp(C)$ auf zwei Weisen berechnet wird, erstens aus Polabstand a und dem Winkel β an dem neuen Pol B und zweitens durch die Multiplikation $Sp \cdot C$:

$$Sp(C) = \begin{pmatrix} \sin a \cdot \cos \beta \\ \sin a \cdot \sin \beta \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha + \cos b \cdot \sin c \\ \sin b \cdot \sin \alpha \\ \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Die hieraus ablesbaren Beziehungen heißen:

Projektionssatz: $\sin a \cdot \cos \beta = -\cos c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha + \cos b \cdot \sin c$

Sinussatz: $\sin a \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \alpha$

Kosinussatz: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$

Da wir die Erdoberfläche als flach wahrnehmen, könnte man erwarten, dass diese Formeln für sehr kurze Seitenlängen gegen die Euklidischen Formeln konvergieren. Das ist in der Tat der Fall:

Für *kleine* Seitenlängen, also für kleine Winkel, gilt:

$$\sin x \approx x, \cos x \approx 1 - x^2/2.$$

Diese Approximationen setzen wir in die sphärischen Formeln ein und vernachlässigen Terme ab dritter Ordnung, die bei Produkten entstehen.

Aus dem Sinussatz wird der Euklidische Sinussatz:

$$a \cdot \sin \beta \approx b \cdot \sin \alpha.$$

Aus dem Kosinussatz wird der Euklidische Kosinussatz:

$$1 - a^2/2 \approx (1 - b^2/2)(1 - c^2/2) + b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad \text{oder:} \quad a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Auch aus dem Projektionssatz wird die Euklidische Version:

$$a \cdot \cos \beta \approx -b \cdot \cos \alpha + c \quad \text{oder:} \quad c \approx a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha.$$

Natürlich kann man in diesen Formeln die Ecken permutieren.

Der Kosinussatz kann noch einfacher bewiesen werden, weil in Euklidischen Räumen Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren mit Hilfe des Skalarproduktes $v \bullet w$

definiert werden:

$$|v| := \sqrt{v \bullet v}, \quad \cos(\angle(v, w)) := \frac{v \bullet w}{|v| \cdot |w|} \quad \text{und damit ein } \textit{einzeiliger} \text{ Beweis:}$$

$$\cos a = \cos(\angle(B, C)) = B \bullet C = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad \checkmark$$

So wie der ebene Kosinussatz die ebene Dreiecksungleichung beweist, so zeigt der sphärische Kosinussatz die **sphärische Dreiecksungleichung**:

$$\begin{aligned} \alpha < \pi &\Rightarrow \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \\ &> \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c = \cos(b+c) \Rightarrow a < b+c. \end{aligned}$$

Damit definiert die Länge des kürzeren Großkreisbogens zwischen zwei Sphärenpunkten wirklich eine Metrik auf \mathbb{S}^2 und das gilt schon, **bevor** wir bewiesen haben, dass es keine kürzeren Verbindungskurven zwischen Sphärenpunkten gibt als diese Großkreisbögen.

Eine weitere Grundformel der sphärischen Geometrie ist der **Winkel-Kosinussatz**:

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c.$$

Ein Beweis, der auch in der hyperbolischen Geometrie geführt werden kann, benutzt zweimal den Projektionssatz und später den Sinussatz, um einen Faktor $\sin a$ zu kürzen:

$$\begin{aligned} \sin a \cdot \cos \beta &= -\cos c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha + \cos b \cdot \sin c \quad | \cdot \cos \alpha \\ \sin a \cdot \cos \gamma &= -\cos b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \cos c \cdot \sin b \quad | + \end{aligned}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} \sin a \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos \gamma &= \\ &= -\cos c \cdot \sin b \cdot \cos^2 \alpha + (\cos b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha) + \cos c \cdot \sin b \\ &= \cos c \cdot \sin b \cdot \sin^2 \alpha \\ &= \cos c \cdot \sin a \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \\ \text{also:} \quad &\underline{\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c.} \end{aligned}$$

Bekannter ist ein Beweis, der den Kosinussatz auf das sogenannte polare Dreieck anwendet. Aber das geht hyperbolisch nicht.

Wir kommen auf die quadratische Pyramide aus der Einleitung, mit Grundseite a und Höhe h , zurück. Mit dem Satz des Pythagoras werden die aufsteigende Kante s und die Höhe f der Seitendreiecke berechnet. Der Winkel α der Seitendreiecke an der Spitze folgt auch direkt aus den Definitionen: $\sin(\alpha/2) = a/2s$, $\tan(\alpha/2) = a/2f$. Aber der Winkel zwischen den Seitenebenen ist euklidisch mühsam. Wenn man die Seitenebenen mit einer (gedachten) Kugel um die Spitze der Pyramide schneidet, so entsteht ein regelmäßiges sphärisches Viereck mit der Seitenlänge $\sigma = \alpha$. Die Winkel ϑ dieses Vierecks sind die Diederwinkel zwischen den Seitenebenen der Pyramide. Dies Viereck wird durch seine Diagonalen in vier *rechtwinklige, gleichschenklige* Dreiecke zerlegt. Ihre Winkel sind also: $\pi/2, \vartheta/2, \vartheta/2$. Der Winkelkosinussatz liefert:

$$\cos(\pi/2) = -\cos^2(\vartheta/2) + \sin^2(\vartheta/2) \cos(\sigma) \quad \text{oder} \quad \cot^2(\vartheta/2) = \cos(\sigma).$$

4. Regelmäßige n-Ecke

In einem regelmäßigen n-Eck ist der Mittelpunktswinkel eines Sektors $2\pi/n$. Der Innenwinkel zwischen den Seiten sei α . Der Umkreisradius sei r (Euklidisch) bzw. ρ (sphärisch). Die Seitenlänge sei s bzw. σ .

Die Dreiecksformeln liefern:

Euklidisch: $s/2 = r \cdot \sin(\pi/n)$

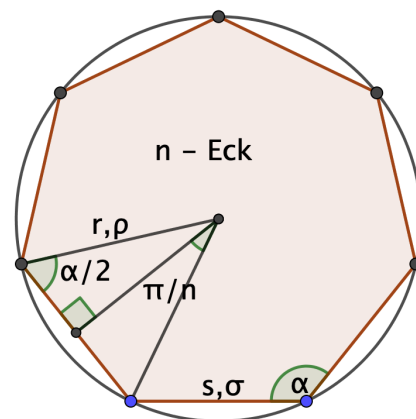
Sphärisch mit dem Sinussatz:

$\sin(\sigma/2) = \sin \rho \cdot \sin(\pi/n) / \sin(\pi/2)$.

Euklidisch: $\cos(\alpha/2) = \sin(\pi/n)$

Sphärisch mit dem Winkel-Kosinussatz:

$\cos(\alpha/2) = 0 + \sin(\pi/n) \sin(\pi/2) \cos \rho < \sin(\pi/n)$.



Während im Euklidischen α unabhängig von r ist, wächst α auf \mathbb{S}^2 mit ρ . Der Grenzwert von α für $\rho \rightarrow 0$ ist der Euklidische Wert. Für $\rho = \pi/2$ wird $\alpha = \pi$.

Projiziert man Platonische Polyeder auf ihre Umkugel, so erhält man eine Pflasterung von \mathbb{S}^2 mit regelmäßigen sphärischen n-Ecken, nämlich gleichseitigen Dreiecken (Tetraeder 4, Oktaeder 8 oder Ikosaeder 20 Stück), der Würfel gibt 6 regelmäßige Vierecke und das Dodekaeder 12 Fünfecke.

Für das Ikosaeder ist $n = 3$, $\alpha = 72^\circ$, also $\cos(\rho) = \cos(36^\circ) / \sin(\pi/3)$.

Im Fall des Dodekaeders ist $n = 5$, $\alpha = 2\pi/3$, also $\cos(\rho) = \cos(\pi/3) / \sin(\pi/5)$.

Man erhält also sehr einfache Formeln für diese Platonischen Pflasterungen. Siehe Abschnitt 9 für die Flächeninhalte dieser sphärischen n-Ecke.

5. Landkarten

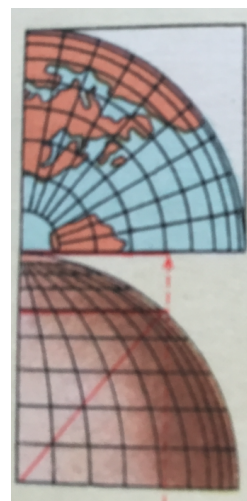
Orthogonale Projektion. Eine Halbsphäre wird orthogonal auf die Tangentialebene in ihrem Mittelpunkt projiziert, im Fall der Erde die Nordhalbkugel auf die Tangentialebene im Nordpol. Dabei werden Kreise, deren Ebenen nicht senkrecht zur Bildebene sind, zu Ellipsen. Die senkrechten Kreise werden Strecken, so lang wie ihr Durchmesser.

Der Rand der Halbsphäre ("Äquator") ist parallel zur Bildebene, wird also in natürlicher Größe abgebildet. Die Bilder der nicht senkrechten Großkreise werden halbe Ellipsen, die das Bild des Äquators von innen in gegenüberliegenden Punkten berühren. Die Umgebung des Äquators wird sehr stark radial gestaucht. Manchmal (vor allem in der Mathematik) wird die Südhalbkugel mit abgebildet.

In Formeln:

$$P = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

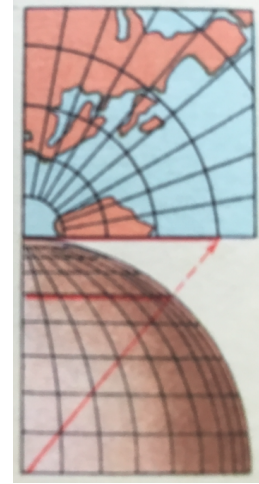
oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Orthogonalprojektion
Dierke Weltatlas 1957

Zentralprojektion. Eine Halbsphäre ohne Rand wird vom Kugelmittelpunkt O surjektiv auf die Tangentialebene im Mittelpunkt der Halbsphäre (z.B. wieder im Nordpol) projiziert.

Dabei werden Großkreise zu geraden Linien, weil ihre Ebenen durch das Projektionszentrum gehen. Kleinere Kreise liegen in Ebenen, die nicht durchs Zentrum gehen. Die Projektionsgeraden sind also die Mantellinien eines Kreiskegels. Der Schnitt der Bildebene mit diesem Kegel ist das Bild des abzubildenden Kreises. Trifft der Kreis den Äquator nicht, so ist dieser Schnitt eine Ellipse. Berührt der Kreis den Äquator, so ist genau eine Mantellinie des Projektionskegels parallel zur Bildebene, das Bild ist eine Parabel. Schneidet der Kreis den Äquator, so sind zwei Mantellinien des Projektionskegels parallel zur Bildebene. Zwei Kreispunkte haben kein Bild, das Bild des Kreises, der Bildkegelschnitt, ist eine Hyperbel. Die radiale Längendehnung nimmt zum Äquator hin so stark zu, dass das Bild der offenen Halbsphäre die ganze Tangentialebene ist.



Zentralprojektion
Dierke Weltatlas 1957

Abbildungsformeln:

$$P = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tan \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \tan \vartheta \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \end{pmatrix}.$$

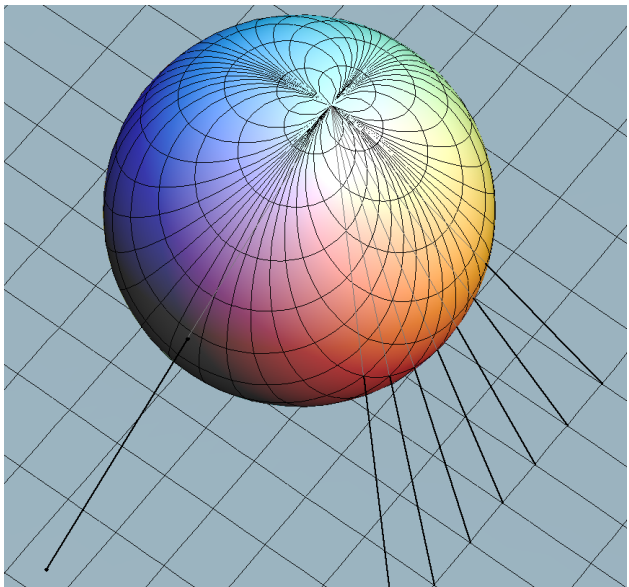
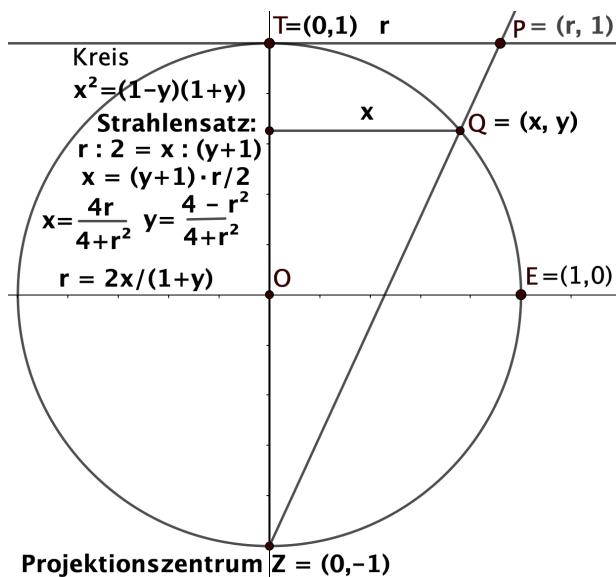
Stereographische Projektion. Von einem Punkt $Z \in \mathbb{S}^2$ wird $\mathbb{S}^2 \setminus \{Z\}$ auf die *Tangentialebene* im gegenüberliegenden Punkt $T = -Z$ projiziert. Diese Projektion hat zwei wichtige Eigenschaften: Sie ist *winkeltreu* und sie bildet *Kreise in Kreise* ab, wobei Kreise durch Z zu Geraden werden. Deshalb wird sie in der Mathematik viel verwendet, z.B. um die Riemannsche Zahlenkugel auf die Gaußsche Zahlenebene abzubilden. Alle Sternkarten, die ich gesehen habe, sind mit stereographischer Projektion gemacht. In Formeln mit Projektionszentrum $Z = (0, 0, -1)$:

$$P = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \tan \vartheta/2 \cdot \cos \varphi \\ 2 \tan \vartheta/2 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x/(1+z) \\ 2y/(1+z) \end{pmatrix}$$

$$\text{Umkehrung: } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4\xi/(4 + \xi^2 + \eta^2) \\ 4\eta/(4 + \xi^2 + \eta^2) \\ (4 - \xi^2 - \eta^2)/(4 + \xi^2 + \eta^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Kontrolle: } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 - \lambda) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda = \frac{4}{4 + \xi^2 + \eta^2}.$$

Das folgende, beschriftete Bild ist nur 2-dimensional. Das rechte Bild zeigt auf der Sphäre zwei Familien von Kreisen, die sich im Projektionszentrum *senkrecht* schneiden. Sie werden auf ein orthogonales Geradennetz in der gegenüber liegenden Tangentialebene abgebildet:



P rational impliziert Q rational, auch 3D! Blick auf Projektionszentrum und Bildebene.

Beweis der Winkeltreue: 1.) Schneide eine Ebene ϵ mit einer Sphäre S^2 so dass $Z \in \epsilon$. Die Stereographische Projektion (Zentrum Z) bildet den Schnittkreis $S^2 \cap \epsilon$ auf die Schnittgrade $g := \epsilon \cap \text{Bildebene}$ ab. Auch alle Tangenten des Kreises werden auf g projiziert - außer der Kreistangente in Z , die **parallel** zu g ist.

2.) Zwei Kreise auf S^2 , die sich schneiden, schneiden sich in beiden Schnittpunkten unter demselben Winkel, denn die beiden Kreise und die Sphäre sind *spiegel-symmetrisch* zu der Ebene durch den Mittelpunkt O der Sphäre und die sphärischen Mittelpunkte $M_1, M_2 \in S^2$ der beiden Kreise.

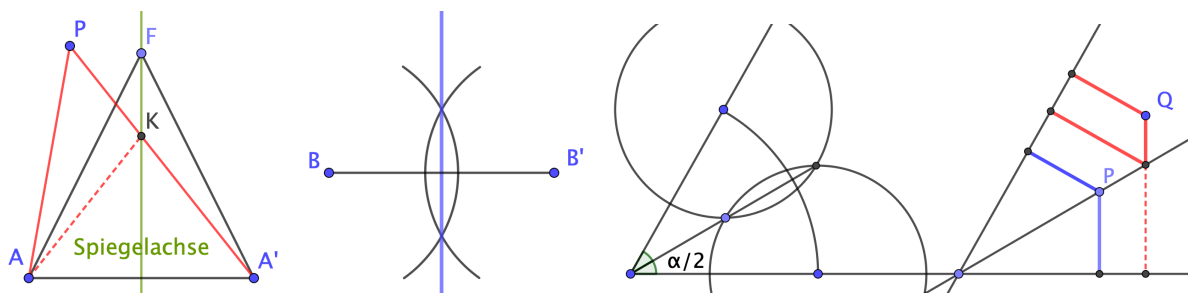
3.) Ein Winkel in $P \in S^2$ ist gegeben durch zwei Tangenten t_1, t_2 in P an die Sphäre. Diese Tangenten spannen mit Z zwei Ebenen ϵ_1, ϵ_2 auf. Deren Schnittkreise mit S^2 schneiden sich in P und Z nach 2.) unter demselben Winkel. Nach 1.) sind ihre Bildgeraden parallel zu den Kreistangenten in Z , schneiden sich also unter demselben Winkel wie t_1 und t_2 . \checkmark

Für die *Kreistreue* der stereographischen Projektion kenne ich verschiedene Beweise. Man kann mit der Umkehrabbildung nachrechnen, dass die Urbilder (in S^2) jedes Kreises in der Tangentialebene eine Ebenengleichung erfüllen. Oder man kann den *quadratischen* Projektionskegel (mit Spitze Z) eines Kreises auf der Kugel betrachten; dieser schneidet die Bildebene (Tangentialebene in T) in einer Ellipse; eine geschickte Anwendung des Höhensatzes zeigt, dass diese Schnittellipse ein Kreis ist. Mir gefällt am besten folgender

Beweis der Kreistreue: Kreise auf S^2 durch Z sind schon behandelt. Für alle anderen Kreise K betrachte den Tangentialkegel, der die Kugel längs K berührt (im Fall von Großkreisen ein Zylinder). Die Mantellinien dieses Kegels werden durch Zentralprojektion von Z auf Geraden in der Bildebene abgebildet, die sich im Projektionspunkt S' der Kegelspitze schneiden. (Das gilt auch für die Mantellinien der tangentialen Großkreis-Zylinder, da nur Großkreise betrachtet werden, die nicht durch Z gehen, so dass deren Zylinderachsen die Bildebene schneiden.) Diese Mantellinien schneiden K senkrecht und *tangential* an S^2 . Wegen der *Winkeltreue* schneidet das Bild von K die radialen Geraden durch S' (also die *Bilder* der Mantellinien) **senkrecht** !! Aber die einzigen Kurven, die ein radiales Geradenbüschel senkrecht schneiden, sind *Kreise*, deren Mittelpunkt das Zentrum des Büschels ist. - (Diese Beweise klappen auch im hyperbolischen Fall.)

6. Elementargeometrie bis zu Schnittpunktsätzen im Dreieck

Die Grundkonstruktionen *Mittelsenkrechte* und *Winkelhalbierende* können auf der Sphäre ebenso wie in der Ebene mit Hilfe von zwei gleich großen Hilfskreisen ausgeführt werden - die beiden mittleren Zeichnungen im nächsten Bild. Man kann sich vorstellen, dass Großkreislineale und Zirkel wie im Euklidischen Fall benutzt werden. Die folgenden Zeichnungen sind zwar in der Ebene angefertigt, können aber auf der Sphäre interpretiert werden. Insbesondere folgt wie in der Ebene aus der Dreiecksungleichung ("Umwege sind länger als der direkte Weg": rot gezeichnete Linien in den beiden äußeren Zeichnungen), dass die Mittelsenkrechte **genau** aus allen Punkten besteht, die gleich weit von den Endpunkten der Strecke AA' entfernt sind. Ebenso besteht die Halbierende eines konvexen Winkels **genau** aus allen Punkten, die gleich weit von den beiden Schenkeln des Winkels entfernt sind. (Links: $|PA| < |PA'|$. Rechts: Q ist näher am oberen Schenkel als am unteren.)



Deshalb **schneiden sich die Mittelsenkrechten** eines sphärischen Dreiecks in einem Punkt, denn der Schnittpunkt von zwei Mittelsenkrechten ist bereits gleich weit von allen drei Ecken entfernt, so dass auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Mittelpunkt des **Umkreises** geht.

Ebenso **schneiden sich die Winkelhalbierenden** eines sphärischen Dreiecks in einem Punkt, denn der Schnittpunkt von zwei Winkelhalbierenden ist bereits gleich weit von allen Dreiecksseiten entfernt, so dass auch die dritte Winkelhalbierende durch diesen Mittelpunkt des **Inkreises** geht.

Die **Seitenhalbierenden** eines sphärischen Dreiecks **schneiden sich in einem Punkt**, weil die Seitenhalbierenden des Euklidischen Sehnendreiecks ABC in den Großkreisebenen der sphärischen Seitenhalbierenden liegen. Diese drei Großkreisebenen schneiden sich in einer radialen Geraden, weil der Mittelpunkt der Kugel und der Schwerpunkt des Sehnendreiecks in ihrem Durchschnitt liegen. – Im Euklidischen schneiden sich auch die Schwerlinien zu unterschiedlichen Gewichten der Ecken, das ist sphärisch meistens falsch.

Es gibt auf der Sphäre **keinen Strahlensatz**. Deshalb kenne ich auch keine Konstruktion, die eine Strecke in n gleiche Teile teilt (außer wiederholtem Halbieren).

Eine Konstruktion, die auf \mathbb{S}^2 schwieriger ist als in \mathbb{R}^2 (man hat eben keinen Thaleskreis), aber durchführbar, ist die **sphärische Tangente an einen Kreis** mit Mittelpunkt M und Radius r von einem Punkt $P \in \mathbb{S}^2$ außerhalb des Kreises - also die Konstruktion eines der beiden Großkreise durch P , der den Kreis berührt, etwa im Berührungspunkt B . Das sphärische Dreieck MPB hat bei B einen rechten Winkel. Setze $L := |MP|$, $\alpha := \angle(BPM)$. Dann sagt der Sinussatz

$$\sin \alpha \cdot \sin L = \sin \pi/2 \cdot \sin r .$$

Man kennt also α und daher den Großkreis durch P mit $\angle MPB = \alpha$.

Dies Problem, sphärische Tangente an einen Kreis, kann man mit Hilfe von $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ auch mit einem Thaleskreis lösen. Schneide die Kreisebene mit der radialen Geraden OP in $P' \in \mathbb{R}^3$ und konstruiere *in dieser Ebene* mit dem Thalesatz die *Euklidische* Tangente von P' an den Kreis, mit Berührungspunkt $B \in \mathbb{S}^2$. Diese Tangente und der Kugelmittelpunkt O spannen eine Ebene auf, die \mathbb{S}^2 in der *Großkreistangente* von P an den Kreis schneidet. Diese Konstruktion ist ungeeignet für 2D-Bewohner von \mathbb{S}^2 .

Mit dem **Schnittpunkt der Höhen** ist es schwieriger, da der übliche Euklidische Beweis auf dem Parallelenaxiom beruht.

Außerdem, in sphärischen Dreiecken mit Seitenlängen $\pi/2$ ist *jede* Verbindung von einer Ecke zur gegenüberliegenden Seite senkrecht auf dieser Seite, also eine Höhe – ein Schnittpunktsatz macht gar keinen Sinn.

Für **spitzwinklige** Dreiecke gibt es jedoch einen Beweis mit dem *“kürzesten Rundweg”*, der auch auf \mathbb{S}^2 klappt. Das nebenstehende Bild ist zwar Euklidisch, das Argument ist aber auch sphärisch richtig.

Wähle auf der Seite AB einen Punkt F und spiegele ihn an den benachbarten Seiten nach F' und F'' . Schneide die Gerade $F'F''$ mit den Dreiecksseiten CB , CA in G , H . Der Weg $FGHF$ ist ein *Rundweg* im Dreieck, dessen Länge gleich $|F'F''|$ ist. Nach dem Kosinussatz für das *gleichschenklige* Dreieck $F'CF''$ mit dem *konstanten* Winkel $\angle(F'CF'') = 2\gamma$, also mit $a = |CF| = |CF'| = |CF''|$, $c = |F'F''|$ hat man:

$$\cos c = \cos^2 a + \sin^2 a \cos 2\gamma = 1 - \sin^2(a) \cdot (1 - \cos 2\gamma).$$

Dieser Rundweg wird am kürzesten, wenn die Länge $a = |CF|$ minimal ist, also wenn F der Lotfußpunkt von C auf AB ist. (Beachte auf der Sphäre $|CF| < \pi/2$.) Das ist das hauptsächliche geometrische Argument, aber wir sind noch nicht fertig.

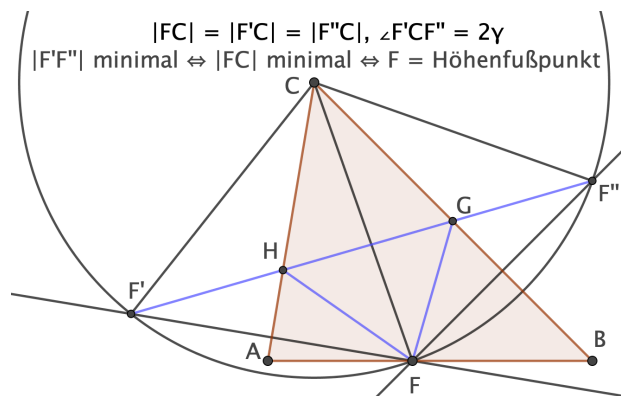
Wenn G oder H nicht Lotfußpunkte sind, kann man den Rundweg weiter verkürzen. Das ändert jedoch die Lage von F und man scheint nicht in endlich vielen Schritten *alle drei Punkte* F, G, H zu Lotfußpunkten machen zu können. Hier kommt nun ein Analysisargument zu Hilfe. Die Länge eines Rundwegs $FGHF$ hängt **stetig** von den drei Punkten ab. Da diese in der **abgeschlossenen und beschränkten** Menge der drei Dreiecksseiten variieren, nimmt die Längenfunktion ihr Minimum an, d.h. *es gibt einen kürzesten Rundweg*. Dieser kann *nicht* durch unsere geometrische Konstruktion verkürzt werden, d.h. seine drei Ecken F, G, H sind die drei Lotfußpunkte und die Höhen sind *Winkelhalbierende* des Dreiecks FGH - wie die geometrische Konstruktion an den Ecken G, H zeigt. – Da diese Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden, folgt:

Die Höhen spitzwinkliger sphärischer Dreiecke schneiden sich in einem Punkt.

Der Rundweg durch die Höhenfußpunkte ist der kürzeste Rundweg.

Die Höhen sind Winkelhalbierende im Dreieck der Höhenfußpunkte.

Auch dies Argument gilt in der hyperbolischen Geometrie. (Im Euklidischen Fall folgt die Existenz des kürzesten Rundwegs ohne das Analysisargument aus der Winkelsumme im Dreieck: $\angle(CF''G) = 90^\circ - \gamma = \angle(GFC)$, $F = \text{Lotfußpunkt} \Rightarrow \angle(GFB) = \gamma = \angle(HFA)$, $\angle(FHA) = \beta = \angle(GHC)$, $\angle(FGB) = \alpha = \angle(HGC) \Rightarrow G, H$ auch Lotfußpunkte.)



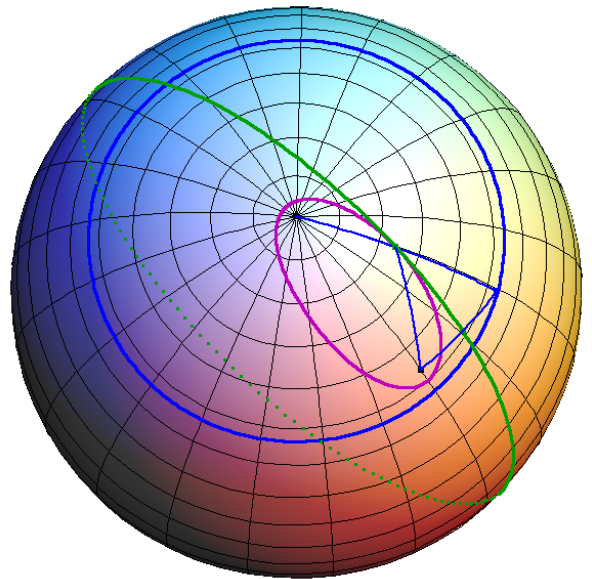
7. Sphärische Ellipsen

(Die Konstruktionen dieses Abschnitts funktionieren samt Beweisen auch in der hyperbolischen Geometrie.)

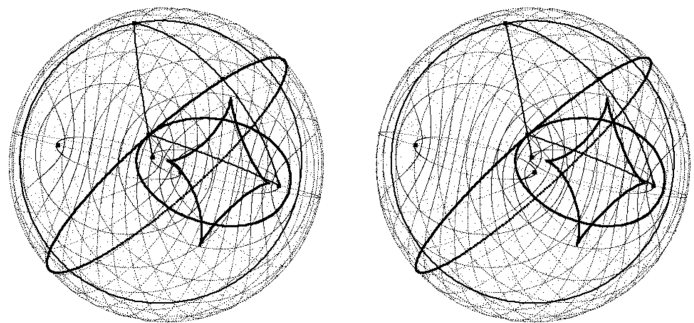
Euklidische Ellipsen sind affine Bilder von Kreisen, aber \mathbb{S}^2 hat keine affinen Abbildungen. Sie sind Kegelschnitte, aber das ist eine 3-dimensionale Euklidische Konstruktion. Es gibt für \mathbb{S}^2 auch keine so gut zur Geometrie passenden Koordinaten wie die cartesischen Koordinaten für \mathbb{R}^2 . Kann man *sphärische Ellipsen* überhaupt sinnvoll definieren? Ich habe sie von dem ersten Offizier des Frachters meiner ersten Amerikareise gezeigt bekommen: Sie waren auf Seekarten eingezeichnet und dienten dem vor GPS benutzten Navigationssystem LORAN-C.

Die der Gärtner-Konstruktion zugrunde liegende Definition: *Die Ellipse ist der geometrische Ort all der Punkte, die von zwei Fokalfpunkten F_1, F_2 konstante Abstandssumme $2a$ haben*, läßt sich wörtlich auf \mathbb{S}^2 benutzen.

Konstruktionsbeschreibung: Schlage um F_1 , im Bild: Zentrum der Polarkoordinaten, einen Kreis vom Radius $2a$ (blau). Lass auf dem Kreis einen Punkt P laufen. Verbinde P mit F_2 . Die Mittelsenkrechte zu PF_2 schneidet den Radius F_1P im Ellipsenpunkt E – denn die Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse (grün), so dass $|EP| = |EF_2|$ und daher $|F_1E| + |EF_2| = 2a$ ist, unabhängig von der Position von P . Außerdem ist die Mittelsenkrechte Tangente in P , denn sie läßt die Ellipse (lila) auf einer Seite.



3D-Bildpaar zum Ansehen mit gekreuzten Augen (“cross-eyed stereo”). (Man fokussiere auf eine Fingerkuppe am unteren Bildrand, etwa in der Mitte zwischen Auge und Bild.)



Solche Stereobilder werden in chemischen Zeitschriften verwendet, um die räumliche Struktur komplizierter Moleküle zu zeigen.

Eine Gleichung für spärische Ellipsen

Für Punkte $P, Q \in \mathbb{S}^2$ bezeichnen wir ihren Großkreisabstand mit $|PQ|$. Es gilt also $P \bullet Q = \cos(\angle POQ)$. Für spärische Ellipsen sei

$$\alpha := |EF_1|, \beta := |EF_2|, \text{ Ellipsengleichung: } 2a = \alpha + \beta$$

$$\text{oder: } \cos(2a) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{und: } \cos \alpha = E \bullet F_1, \cos \beta = E \bullet F_2.$$

Ziel ist, alle trigonometrischen Ausdrücke durch Skalarprodukte zu ersetzen:

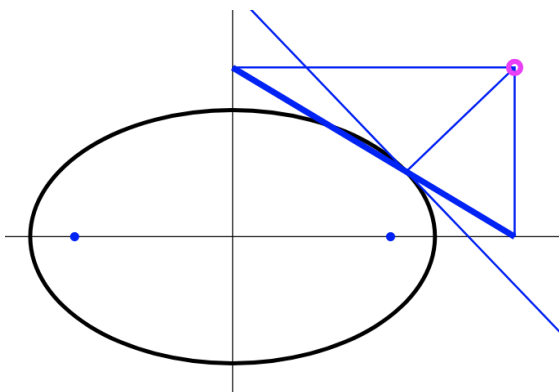
$$(\cos(2a) - \cos \alpha \cdot \cos \beta)^2 = (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)$$

$$(\cos(2a) - (E \bullet F_1) \cdot (E \bullet F_2))^2 = (1 - (E \bullet F_1)^2)(1 - (E \bullet F_2)^2).$$

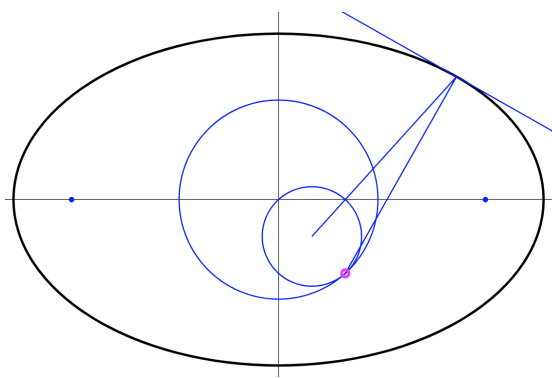
$$\text{vereinfacht: } \sin^2(2a) \cdot (E \bullet E) - 2 \cos(2a)(E \bullet F_1) \cdot (E \bullet F_2) = -(E \bullet F_1)^2 - (E \bullet F_2)^2$$

Dies ist eine homogene quadratische Gleichung in den Koordinaten von $E = (x, y, z)$. Eine sphärische Ellipse ist also *Durchschnitt zwischen der Sphäre und einem quadratischen Kegel mit Spitze im Mittelpunkt der Kugel*. Zentralprojektion einer sphärischen Ellipse von O auf eine Ebene gibt also einen Euklidischen Kegelschnitt!

Auch andere Euklidische Konstruktionen der Ellipse kann man auf der Sphäre wiederholen. Allerdings muss man nicht erwarten, dass sich dabei dieselben Kurven ergeben, wie die eben diskutierten sphärischen Ellipsen. Zwischen der großen Halbachse a , der kleinen Halbachse b und dem halben Abstand e der Fokalfpunkte gilt Euklidisch $b^2 + e^2 = a^2$ und sphärisch mit dem Kosinussatz $\cos b \cdot \cos e = \cos a$. Ob in den beiden folgenden Konstruktionen die Abstandssumme von diesen beiden Fokalfpunkten auch auf der Sphäre konstant ist, müßte man nachrechnen. In beiden Fällen liefern die Konstruktionen auch die Großkreis-Tangenten der sphärischen Kurven!

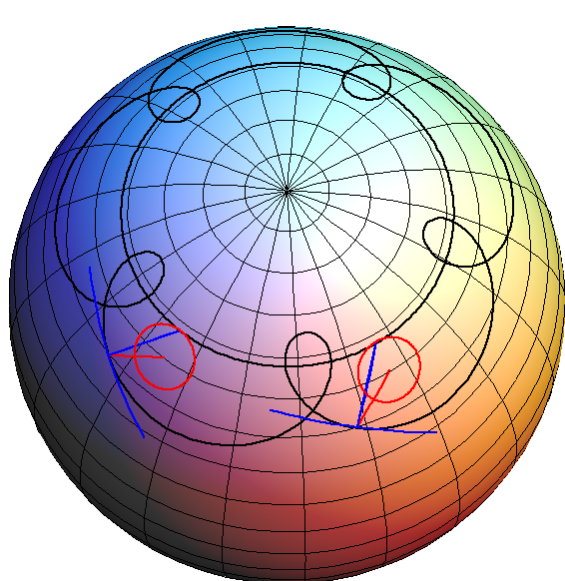


Papierstreifenkonstruktion der Ellipse: Eine Strecke der Länge $a + b$ wird im Verhältnis $b : a$ geteilt. Die Strecke wird so bewegt, dass die Enden auf den Achsen laufen. Der Teilpunkt zeichnet die Ellipse. Die Tangente ist senkrecht zur Strecke zwischen Kurvenpunkt und Schnittpunkt der Lote auf den Achsen, in den Enden der bewegten Strecke.

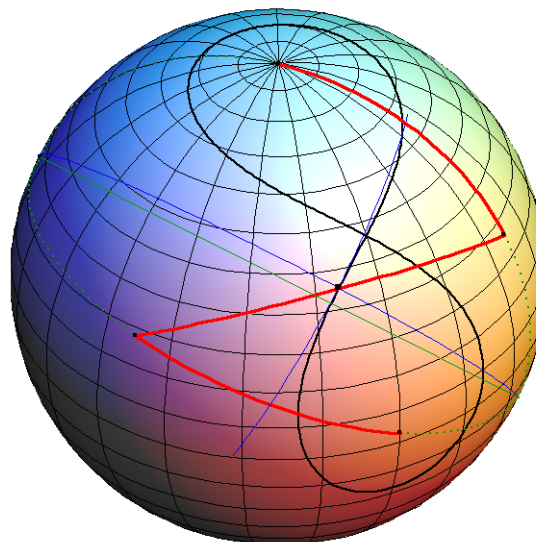


Ellipse als Rollkurve: Ein Kreis rollt in einem doppelt so großen Kreis. Der gezeichnete verlängerte Radius des kleinen Kreises ist fest mit diesem verbunden und zeichnet beim Rollen die Ellipse. – Tangentenkonstruktion: Die Strecke vom Berührungspunkt (zwischen kleinem Kreis und Festkreis) zum Kurvenpunkt ist senkrecht zur Tangente.

Um zu betonen, dass Euklidische Konstruktionen, die **keine Vergrößerungen oder Verkleinerungen** enthalten, auf der Kugeloberfläche nachgemacht werden können, hier noch zwei Beispiele.



Eine typische Rollkurve mit Schleifen.



Ein dreiteiliger Gelenkmechanismus zeichnet eine spärliche Lemniskate.

Beide Tangentenkonstruktionen sind wie im Euklidischen Fall: Die Tangente ist senkrecht zum verallgemeinerten Drehradius (blau), also senkrecht zur Verbindungsstrecke vom Kurvenpunkt zum momentanen Drehpunkt. Im Fall der Rollkurven ist der momentane Drehpunkt der Berührungspunkt von Rollkreis und Festkreis. Im Fall der Lemniskate können die beiden äußeren Gelenkstäbe sich nur um ihren äußeren Endpunkt drehen. Die momentane Drehachse ist also die Schnittgerade der beiden Großkreisebenen (grün), in denen die äußeren Stäbe liegen.

8. Argumentieren mit der Kurvenlänge

Als Definition der Kurvenlänge parametrisierter Kurven $c : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ wird meistens das Integral des Betrags der Ableitung genommen: $\text{Länge}(c) := \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$. Der Erstkontakt mit der Kurvenlänge des Kreises definiert dagegen die Länge als Supremum der Länge einbeschriebener Sehnenpolygone (mit dem Integral als offensichtlicher oberer Schranke):

$$\begin{aligned} \text{Länge}(c) &:= \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{i=1}^{i=n} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \\ &= \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{i=1}^{i=n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{c}(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{c}(t)| dt = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \end{aligned}$$

Beide Definitionen, diese Abschätzung und der folgende Beweis funktionieren in *jedem normierten Vektorraum*, nicht nur für Euklidische Normen.

Um zu zeigen, dass die beiden Definitionen der Kurvenlänge für stetig differenzierbare Kurven übereinstimmen, definieren wir die *stetige* Bogenlängenfunktion \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(t) := \sup_{a=t_0 < t_1 \dots < t_n = t} \sum_{i=1}^{i=n} |c(t_i) - c(t_{i-1})|$$

Wir zeigen, dass \mathcal{L} differenzierbar ist mit $\mathcal{L}'(t) = |\dot{c}(t)|$. Wegen $\mathcal{L}(a) = 0$ folgt dann

aus dem Monotoniesatz $\boxed{\mathcal{L}(t) = \int_a^t |\dot{c}(\tau)| d\tau.}$

Die Definition von \mathcal{L} und die bewiesene Abschätzung ergeben folgende Ungleichungen:

$$\left| \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \right| \leq \frac{\mathcal{L}(t+h) - \mathcal{L}(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\dot{c}(\tau)| d\tau$$

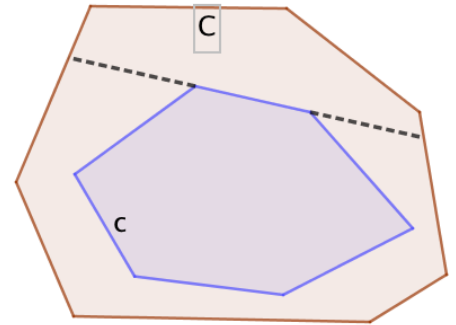
In dieser Ungleichungskette haben die beiden äußeren Terme für $h \rightarrow 0$ den Grenzwert $|\dot{c}(t)|$, also existiert die Ableitung von \mathcal{L} und zwar $\mathcal{L}'(t) = |\dot{c}(t)|$.

Aus der *geometrischen Definition* folgt allein mit der Dreiecksungleichung folgender Vergleichssatz für konvexe Kurven (den ich mit dem Kurvenlängen-Integral nicht beweisen kann). Er gilt Euklidisch und Nicht-Euklidisch:

*Liegt eine konvexe Kurve c im Inneren einer konvexen Kurve C so gilt
Länge(c) \leq Länge(C).*

Beweis. Zunächst sei c ein Polygon:

Eine Seite von c wird als Gerade verlängert und damit C in zwei konvexe Kurven zerlegt, die beide wegen der Dreiecksungleichung kleineren Umfang als C haben. Wir wählen die Kurve C' , die c enthält und wiederholen den ersten Schritt mit einer anderen Seite von c . Nachdem alle Seiten von c benutzt wurden, hat man die äußere konvexe Kurve **umfangsvermindernd** in die innere verwandelt. Ist c beliebig, so ist jedes c einbeschriebene Polygon kürzer als C und damit Länge(c) \leq Länge(C).



Andererseits kann man die *Integraldefinition* sofort verwenden, um die Länge von Kurven zu berechnen, die in Polarkoordinaten gegeben sind:

Euklidisch	Sphärisch
$x(t) = r(t) \cos \varphi(t)$	$x(t) = \sin \vartheta(t) \cos \varphi(t)$
$y(t) = r(t) \sin \varphi(t)$	$y(t) = \sin \vartheta(t) \sin \varphi(t)$
$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{\varphi}(t)^2$	$z(t) = \cos \vartheta(t)$
	$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 = \dot{\vartheta}(t)^2 + \sin(\vartheta(t))^2 \dot{\varphi}(t)^2$

Folgerung: Für Kurven, die in *gleichen Polarkoordinaten* gegeben sind, $r(t) = \vartheta(t), \varphi(t)$, folgt aus $\sin(x)^2 \leq x^2$:

$$\boxed{\text{Länge}_{\text{Euklidisch}} \geq \text{Länge}_{\text{Sphärisch}}}$$

Satz: Es gibt auf der Sphäre keine kürzeren Verbindungen als die Großkreisbögen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass keine Kurve $(\vartheta(t), \varphi(t))$ das Zentrum von Polarkoordinaten mit einem Punkt im *Großkreis-Abstand* ϑ_1 kürzer verbinden kann als ein Großkreisbogen $\varphi(t) = \text{const}$:

$$\vartheta_1 = \int_0^{t_1} \dot{\vartheta}(t) dt \leq \int_0^{t_1} |\dot{\vartheta}(t)| dt \leq \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{\vartheta}(t)^2 + \sin(\vartheta(t))^2 \cdot \dot{\varphi}(t)^2} dt.$$

Das zeigt: Ein monoton durchlaufener Großkreisbogen ist kürzeste Verbindung seiner Endpunkte - die am Anfang nicht vollständig erledigte Frage nach den kürzesten Verbindungskurven auf der Sphäre hat also die erwartete Antwort.

Wir hatten schon gesehen, dass reguläre n-Ecke auf der Sphäre größere Winkel haben als in der Ebene. Für Dreiecke liefert die vorhergehende Folgerung genauere Aussagen.

Satz. Stimmen ein Euklidisches Dreieck und ein sphärisches Dreieck in zwei Seitenlängen a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ überein, so ist die dritte Seitenlänge in dem Euklidischen Dreieck größer

$$|c_E| \geq |c_S|.$$

Beweis. Beschreibe im Euklidischen Dreieck die γ gegenüberliegende Seite mit Polarkoordinaten $(r(t), \varphi(t))$ vom Zentrum C aus. Benutze diese selben Koordinaten, also $(\vartheta(t) = r(t), \varphi(t))$, für eine Kurve, die *auf der Sphäre* die Endpunkte der Seiten a, b verbindet. Diese Kurve hat nach der Folgerung (S. 12 unten) eine kleinere Länge als im Euklidischen Dreieck. Die *kürzeste* Verbindungskurve dieser Endpunkte, also der Großkreisbogen c_S , kann nicht länger sein als die konstruierte Verbindung. Also $|c_E| \geq |c_S|$.

Satz. Stimmen in einem Euklidischen und einem sphärischen Dreieck alle drei Seitenlängen $|a|, |b|, |c|$ überein, so sind die drei Euklidischen Winkel kleiner als die sphärischen:

$$\alpha_E \leq \alpha_S, \beta_E \leq \beta_S, \gamma_E \leq \gamma_S.$$

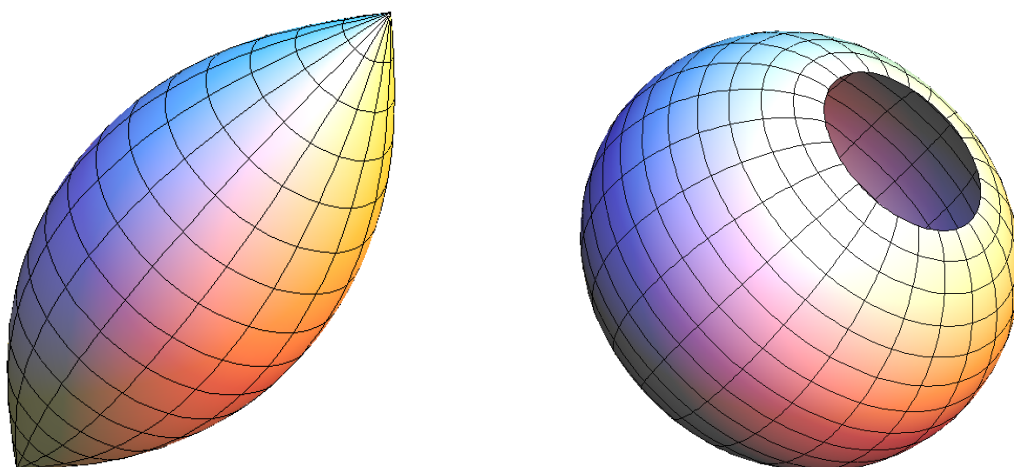
Beweis. Der Beweis ist für alle drei Winkel derselbe, wir zeigen $\gamma_E \leq \gamma_S$. Betrachte in der Ebene und auf der Sphäre Dreiecke mit *denselben Daten*: nämlich mit den Seitenlängen a, b und dem Winkel γ_S . In dem Euklidischen Hilfsdreieck ist (nach dem bewiesenen Satz) die γ_S gegenüberliegende Seite *länger* als auf der Sphäre, also länger als die Länge $|c|$ der vorausgesetzten Dreiecke. Die γ_S gegenüberliegende Seite des Euklidischen Hilfsdreiecks muss auf die Länge $|c|$ *verkleinert* werden, damit das vorausgesetzte Dreieck entsteht. Nach dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ wird dabei γ_S auf γ_E *verkleinert*, so dass $\gamma_E \leq \gamma_S$ bewiesen ist.

Ich möchte ausdrücklich hervorheben, welch **großen Fortschritt** wir erreicht haben: Am Anfang waren die Großkreise definiert als ebene Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel, also mit Hilfe der 3-dimensionalen Euklidischen Geometrie. Jetzt können wir diese Linien als *kürzeste Verbindungskurven* beschreiben. Sie gehen also bei jeder längentreuen Abbildung auf eine andere Fläche in deren kürzeste Verbindungskurven über. Die Ableitungen längentreuer Abbildungen sind in jeder Tangentialebene *orthogonale* Abbildungen. Deshalb ändern sich Winkel unter solchen Abbildungen nicht. – Die vorhergehenden Ausführungen, also die Dreiecksgeometrie mit expliziten Formeln und Ungleichungen und auch die Konstruktionen spezieller Kurven, gelten von nun an auf **allen** Flächenstücken, die als *längentreue* Bilder von Sphärenstücken erhalten werden. Gauß hat dafür den Namen “*innere Geometrie*” geprägt. Die begonnenen Argumente reichen weit in die Differential-

geometrie hinein. Zwar sind kürzeste Verbindungskurven auf Flächen fast nie mit expliziten Formeln beschreibbar, sie sind Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wenn man z.B. mit Polarkoordinaten auf Flächen arbeiten möchte, deren radiale Linien kürzeste Verbindungskurven sind, muss man die Lösungen solcher Differentialgleichungen nach ihren Anfangsbedingungen differenzieren können.

Mit der Vokabel “Krümmung des Raumes” aus Kosmologie oder Differentialgeometrie ist **nicht** gemeint, was wir als erstes, auch bei S^2 , wahrnehmen: *wie gebogen die Fläche in “unserem” 3-dimensionalen Raum liegt*. Notwendig ist ein Krümmungsbegriff, der allein mit Hilfe der *kürzesten Verbindungskurven* formuliert werden kann. Dazu bedarf es weiterer Vorbereitungen. Ab S.19 komme ich zu Einzelheiten. Zunächst noch drei Beispielflächen:

Im \mathbb{R}^3 kann die vollständige Sphäre S^2 keine andere Form annehmen. Die folgenden drei Bilder zeigen Flächen, die *stückweise längentreu auf Sphärenstücke abgebildet werden können*. (Z.B. kann man einen halben Tennisball verbiegen.) Auf den Rotationsflächen gibt es natürlich ebene Kreise, aber die meisten Abstandskreise auf diesen Flächen sind nicht eben wie auf S^2 .

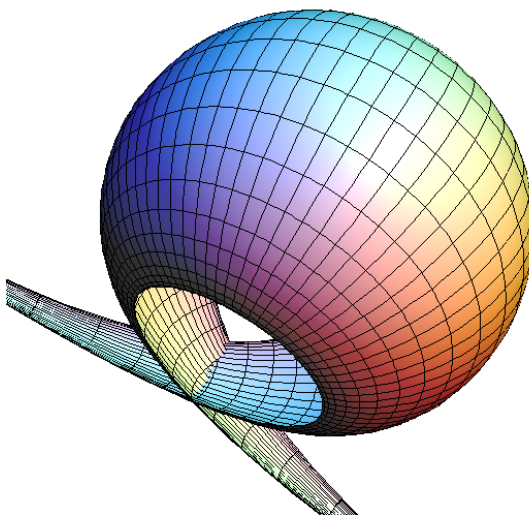


Rotationsflächen, links Symmetrie-Äquator kürzer als 2π , rechts länger als 2π .

Sievert-Enneper Flächen

Die Flächen dieser Familie sind unbeschränkt. Die unendlich langen Parameterlinien sind ebene Kurven. Die dazu senkrechten Kurven werden am Rande singulär.

Ändert man die (expliziten) Gleichungen so, dass die Löcher kleiner werden, dann konvergieren die beiden Parameter Familien gegen die Familien orthogonaler Kreise, denen wir bei der stereographischen Projektion begegnet sind.



Auf diesen Flächen gilt die sphärische Dreiecksgeometrie, die ursprünglich nur für S^2 hergeleitet wurde, weil wir die Großkreise als *kürzeste Verbindungskurven* charakterisiert haben.

9. Sphärische Flächeninhalte

Flächeninhalte von parametrisierten Flächenstücken können durch 2-dimensionale Integration im Definitionsbereich der Parametrisierung berechnet werden. Dabei muss die *punktweise Flächenverzerrung* durch die Parametrisierung berücksichtigt werden. Das ist besonders einfach bei orthogonalen Parametern. Für die Polarkoordinaten der Sphäre haben die ϑ -Meridiane Tangentialvektoren der Länge 1 und die dazu senkrechten φ -Linien haben Tangentialvektoren der Länge $\sin \vartheta$. An jeder Stelle (ϑ, φ) hat man daher für die Flächenverzerrung vom Parameterbereich auf die Sphäre den Faktor $\sin \vartheta$. Das liefert eine Berechnung der Fläche des α -Sektors zwischen zwei Meridianen und damit von \mathbb{S}^2 :

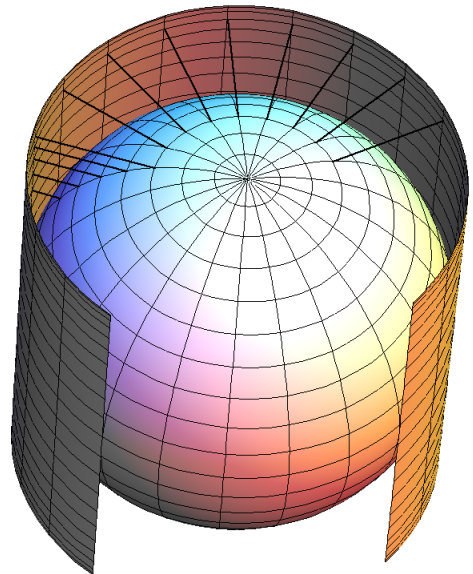
$$\text{area}(\alpha\text{-Sektor}) = \int_0^\pi \left(\int_0^\alpha d\varphi \right) \sin \vartheta d\vartheta = \alpha \cdot (-\cos \vartheta) \Big|_0^\pi = 2\alpha, \quad \text{area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi.$$

Archimedes hat das anders gemacht:

Er betrachtete den umbeschriebenen Zylinder derselben Höhe und projizierte ihn radial-horizontal auf die Sphäre ($0 \leq \vartheta \leq \pi$ oder $-1 \leq \cos \vartheta \leq +1$):

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Die Breitenkreise der Sphäre sind um den Faktor $\sin \vartheta$ kürzer als die Breitenkreise des Zylinders, aber die Tangentialvektoren der Mantellinien des Zylinders sind ihrerseits um den Faktor $|\cos'(\vartheta)| = \sin \vartheta$ kürzer als die Tangentialvektoren der Meridiane der Sphäre. Deshalb ist diese Abbildung flächentreu. Die Fläche des Zylinders ist 4π .



Für Landkarten der Erde sind auch (bis auf einen Maßstabsfaktor) *flächentreue* Polarkoordinaten üblich:

$$\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \sin(\vartheta/2) \cos \varphi \\ 2 \sin(\vartheta/2) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Die Tangentialvektoren der radialen Linien haben die Länge $\cos(\vartheta/2)$, die Tangentialvektoren der Breitenkreise haben die Länge $2 \sin(\vartheta/2)$. Das Produkt dieser Längen ist wie auf der Sphäre gleich $\sin(\vartheta)$. Das Bild von \mathbb{S}^2 ist ein Kreis vom Radius 2, also der Fläche 4π .

Für den Flächeninhalt von Dreiecken hat man eine berühmte Formel:

Satz. Für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC auf der Einheitssphäre gilt

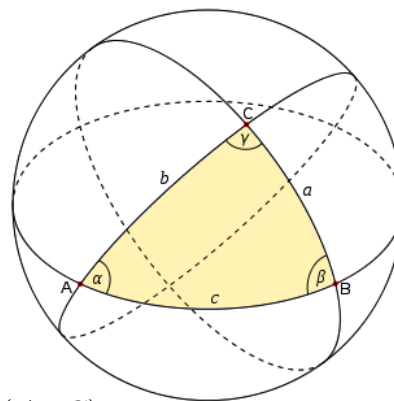
$$\text{area}(ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Verlängert man die Dreiecksseiten zu drei Großkreisen, so gehen durch jede Ecke zwei Großkreise, die zwei Großkreis-Zweiecke beranden. Diese sechs Zweiecke zusammen haben den Flächeninhalt

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma.$$

Die Zweiecke überdecken das Dreieck ABC und das kongruente Antipoden-Dreieck $-(ABC)$ dreimal, den Rest der Sphäre einmal. Deshalb ist die Summe der Flächeninhalte der Zweiecke gleich dem Flächeninhalt der Sphäre + viermal dem Flächeninhalt des Dreiecks, also:

$$\begin{aligned} 4(\alpha + \beta + \gamma) &= 4\pi + 4 \cdot \text{area}(ABC) \\ \alpha + \beta + \gamma - \pi &= \text{area}(ABC) \end{aligned}$$

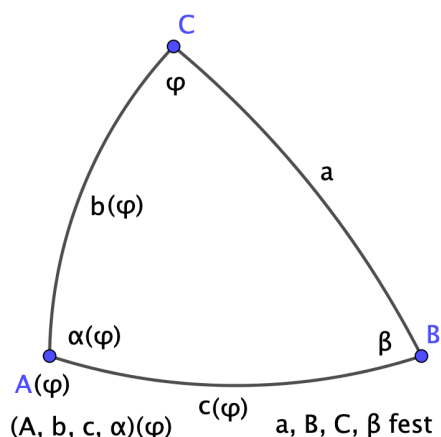


Wegen der Bedeutung dieses Satzes leiten wir ihn auch aus den Dreiecksformeln her. - In einem Dreieck seien a, B, C, β fest, φ variere von 0 bis γ und A, b, c, α hängen von φ ab. Der Flächeninhalt ist:

$$F(\gamma) = \int_0^\gamma d\varphi \int_0^{b(\varphi)} \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^\gamma (1 - \cos(b(\varphi))) d\varphi$$

Zu zeigen ist also wegen $F(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(\alpha(\varphi) + \beta + \varphi - \pi) &= \alpha'(\varphi) + 1 = \\ &= F'(\varphi) = 1 - \cos(b(\varphi)). \end{aligned}$$



Dazu differenzieren wir den Winkelkosinussatz in der Form

$$\begin{aligned} \cos(\alpha(\varphi)) &= -\cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta \cos a \\ -\sin(\alpha(\varphi)) \cdot \alpha'(\varphi) &= \sin \varphi \cos \beta + \cos \varphi \sin \beta \cos a \end{aligned}$$

dividieren durch $\sin(\alpha(\varphi))$, benutzen den Sinussatz

$$-\alpha'(\varphi) = \frac{\sin(c(\varphi))}{\sin a} \cos \beta + \frac{\sin(b(\varphi))}{\sin a} \cos \varphi \cos a$$

und schließlich den Projektionssatz: $\sin c \cos \beta = \cos b \sin a - \cos a \sin b \cos \gamma$
um den Beweis zu beenden: $-\alpha'(\varphi) = \cos(b(\varphi))$.

Dieser zweite Beweis kann in der hyperbolischen Geometrie wiederholt werden, der erste nicht.

Illustration mit den Platonischen Körpern

Projiziert man Platonische Körper auf ihre Umkugel, so erhält man eine Pflasterung der Sphäre mit regelmäßigen sphärischen n-Ecken. Die sphärischen Winkel sind größer als die der Euklidischen n-Ecke. Da an einer Ecke mindestens $k =$ drei n-Ecke zusammenstoßen müssen, dürfen die Winkel höchstens 120° groß sein. (Erinnerung: $\text{area}(S^2) = 4\pi$.)

Dreieckswinkel bei festen Seitenlängen: *Euklidisch* < *Sphärisch*.

$n=3$. Dreieckswinkel: $\pi/3 < 2\pi/k \leq 2\pi/3$, also $k = 3, 4, 5$ Polygone an jeder Ecke,

Dreiecksfläche: $6\pi/k - \pi = (4\pi/4, 4\pi/8, 4\pi/20)$, also 4, 8 oder 20 Dreiecke pflastern.

$n=4$. Viereckswinkel: $\pi/2 < 2\pi/3$ Vierecksfläche: $8\pi/3 - 2\pi = 4\pi/6 \Rightarrow 6$ Vierecke.

$n=5$. Fünfeckswinkel: $3\pi/5 < 2\pi/3$ Fünfecksfläche: $10\pi/3 - 3\pi = 4\pi/12 \Rightarrow 12$ Fünfecke.

Man bekommt also direkt alle Möglichkeiten zusammen mit der Anzahl der Seitenflächen.

Auch Umkreisradius und Seitenlänge σ der sphärischen n-Ecke ergeben sich aus den Formeln für sphärische Dreiecke mit einem rechten Winkel, Abschnitt 4. Für das Platonische Polyeder im \mathbb{R}^3 ist σ der *Mittelpunktswinkel zwischen benachbarten Ecken*. Die Euklidische Berechnung für Tetraeder, Dodekaeder und Ikosaeder ist deutlich mühsamer.

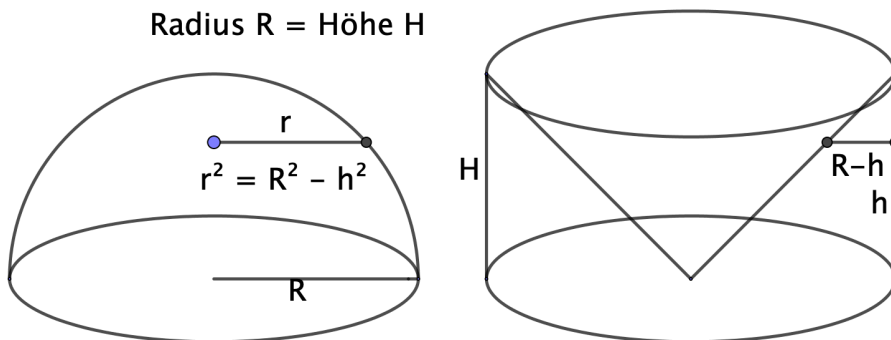
Kugelvolumen

Das Kugelvolumen gehört nicht zur sphärischen Geometrie, es ist aber eng damit verwandt. Außerdem muss der berühmte Beweis des Archimedes erwähnt werden. Bohrt man aus einem Zylinder der Höhe $H = R$ einen Kegel der Höhe H heraus, so hat der Restkörper dasselbe Volumen wie die Halbkugel: $2\pi/3 \cdot R^3$, weil beide in jeder Höhe h denselben Querschnitts-Flächeninhalt haben (später: Cavalierisches Prinzip).

Volumen der Halbkugel nach Archimedes

Die Volumina verhalten sich so $\text{Kegel:Halbkugel:Zylinder} = 1:2:3 \cdot \frac{\pi}{3} R^3$

Radius $R =$ Höhe H



Querschnittsflächen in der Höhe h sind gleich

$$\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$$

Für die Kugel war im Altertum auch schon die Beziehung bekannt:

$$\boxed{\text{Volumen}(R) = \text{Oberfläche}(R) \times \text{Radius}/3.}$$

Wenn man nur weiß: $\text{Oberfläche}(R) = \text{const} \cdot R^2$, dann folgt diese Beziehung aus der schon bei der Berechnung von sphärischen Flächeninhalten benutzten Integralrechnung:

$$\text{Volumen}(R) = \int_0^R \text{const} \cdot r^2 dr = \text{const} \cdot R^3/3 = \text{Oberfläche}(R) \cdot R/3.$$

Ohne Integralrechnung ergibt sich diese Beziehung (nicht ganz vollständig) so:

Betrachte Polyeder, deren Seitenflächen alle tangential an eine Kugel sind. Schneidet man das Polyeder mit allen Dreiecken mit Spitze im Kugelmittelpunkt, die eine Polyederkante als der Spitze gegenüberliegende Seite haben, so erhält man lauter Pyramiden, die den Kugelradius als Höhe haben. Für all diese Pyramiden gilt also

$$\text{Volumen} = \text{Basisfläche} \times \text{Radius}/3.$$

Da die Oberfläche solcher Polyeder aus der Vereinigung der Basisflächen der Pyramiden besteht, gilt für diese konvexen "Tangential-Polyeder"

$$\text{Volumen} = \text{Oberfläche} \times \text{Radius}/3.$$

Man kann mit weiteren Tangentialebenen Polyederecken abschneiden, um der Kugel näher zu kommen. Wenn alle Seitenflächen in Kreisen vom Radius r um ihre Berührungspunkte enthalten sind, können die Eck-Vektoren nicht länger sein als

$$L = \sqrt{R^2 + r^2} \leq R(1 + (r/R)^2/2).$$

Verkleinert man das Polyeder um den Faktor R/L , so liegt es innerhalb der Kugel. Die Volumina der umbeschriebenen und einbeschriebenen Polyeder sind offensichtlich obere und untere Schranken für das Kugelvolumen. Aus der Konvexität von Kugel und Polyedern folgt nun auch, dass die Oberflächen der Polyeder obere und untere Schranken der Kugeloberfläche sind. Die Details lasse ich aus. Schließlich kann man mit weiteren Tangentialebenen Ecken abschneiden und so den Umradius r der Seitenflächen beliebig klein machen, so dass die Volumina und Oberflächen der umbeschriebenen bzw. einbeschriebenen Polyeder gegen dieselbe Zahl konvergieren, also gegen Kugelvolumen und Kugeloberfläche. Deshalb gilt für die Kugel dieselbe Beziehung zwischen Volumen und Oberfläche wie für die Tangential-Polyeder:

$$\text{Volumen} = \text{Oberfläche} \times \text{Radius}/3.$$

10. Kurvenkrümmung

Der Begriff *Krümmung* kommt in der Umgangssprache vor in Formulierungen wie: “Das Auto flog aus der Kurve, weil deren Krümmung zu groß war. Auch, dass kleinere Kreise *stärker gekrümmt* sind als größere, rechne ich zur Umgangssprache. Aber, anders als für Längen und Flächeninhalte oder physikalische Begriffe wie Kraft und Stromstärke gibt es in der Umgangssprache keine *quantitative* Beschreibung für die Größe von Krümmung. Wie nun kommen Mathematiker dazu zu sagen:

Die Krümmung eines Kreises vom Radius r hat die Größe $1/r$?

Eine solche Größenfunktion sollte schon eine fallende Funktion des Radius sein, aber warum genau $1/r$?

Da dies keine Einführung in die Differentialgeometrie ist, erkläre ich zuerst, dass man zu jeder 2-mal stetig differenzierbaren Kurve $t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ mit $|c'(t)| = \text{const}$ leicht an jeder Stelle t_0 einen Kreis $k(t)$ angeben kann mit

$$k(t_0) = c(t_0), \quad k'(t_0) = c'(t_0), \quad k''(t_0) = c''(t_0).$$

Ein solcher Kreis ist eindeutig bestimmt und heißt *Krümmungskreis*. Falls $c''(t_0) = 0$ ist, entartet der Krümmungskreis zu einer Gerade, die eine besser als normal approximierende Tangente ist. Z.B. sind die Tangenten des Graphs der Sinusfunktion an den Nullstellen solche besser approximierenden (Wende-)Tangenten.

Kreisbeschreibung: Es seien $T, B \in \mathbb{R}^n$ orthonormale Einheitsvektoren. Betrachte den Kreis

$$\begin{aligned} k(t) &:= p_0 + r \cdot \sin(\omega(t - t_0)) \cdot T + r \cdot (1 - \cos(\omega(t - t_0))) \cdot B, & k(t_0) &= p_0 \\ k'(t) &= r\omega \cdot \cos(\omega(t - t_0)) \cdot T + r\omega \cdot \sin(\omega(t - t_0)) \cdot B, & k'(t_0) &= r\omega \cdot T \\ k''(t) &= -r\omega^2 \cdot \sin(\omega(t - t_0)) \cdot T + r\omega^2 \cdot \cos(\omega(t - t_0)) \cdot B, & k''(t_0) &= r\omega^2 \cdot B \end{aligned}$$

Bemerkung: Bei der Parametrisierung von Kreisen ist es üblich, Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω als unabhängige Daten zu betrachten, also nur mit $|k'(t)| = \text{const}$ zu parametrisieren und nicht $r \cdot \omega = 1$ vorauszusetzen. Ich komme erst später zu einer Formel für die Krümmung und will zuerst erklären, warum es genügt, ein quantitatives Maß für die Krümmung von Kreisen zu finden. Deshalb wird statt der üblichen Voraussetzung $|c'(t)| = 1$ nur $|c'(t)| = \text{const}$ verlangt.

Aus $|c'(t)| = \text{const}$ folgt $c'(t) \perp c''(t)$. Im Fall $c''(t_0) \neq 0$ kann man die Daten für den (eindeutigen) Krümmungskreis explizit hinschreiben:

$$p_0 := c(t_0), \quad T := c'(t_0)/|c'(t_0)|, \quad B := c''(t_0)/|c''(t_0)|, \quad \omega := |c''(t_0)|/|c'(t_0)|, \quad r := |c'(t_0)|/\omega.$$

Schließlich: $r(t_0) = |c'(t_0)|^2/|c''(t_0)|$

Verabredung: Die Größe der Krümmung der Kurve c an der Stelle $c(t_0)$ wird definiert als die Größe der Krümmung des beschriebenen Krümmungskreises an der Stelle t_0 .

Das ist noch kein Beitrag zur Bestimmung der Größe der Krümmung als Funktion des Radius. Aber die Reduktion auf die Krümmung von Kreisen verspricht, dass wir in der sphärischen und hyperbolischen Geometrie wiederholen können, was historisch natürlich zuerst im Euklidischen Fall gemacht wurde.

Kreise hängen so eng mit Winkeln zusammen, dass der Name *Winkelgeschwindigkeit* für den Parameter ω leicht verständlich ist. Ein solcher Kreis ist mit $|k'(t)| = 1$ parametrisiert, wenn $\omega = 1/r$ gewählt wird. Die Gleichung für k' ist ebenfalls eine Kreisgleichung (der historische Name für dieses Tangentenbild ist *Hodograph*) und als älteste Größe für die

Krümmung wurde die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1/r$ von k' gewählt. Mit der eingerahmten Formel für den Radius des Krümmungskreises liefert das:

Die Krümmung der gegebenen Kurve c an der Stelle t hat die Größe $\kappa(t) = |c''(t)|/|c'(t)|^2$.
 $\kappa(t)$ ist die Winkelgeschwindigkeit von $c'(t)$, falls $|c'(t)| = 1$.

Für Kreise vom Radius r in der Euklidischen Ebene ist die Größe der Krümmung $\kappa = 1/r$.
 Gerade Linien, also kürzeste Verbindungskurven ihrer Punkte, haben die Krümmung 0.

Diese einfache Herleitung läßt sich für Kreise auf \mathbb{S}^2 nicht nachmachen, weil die Winkelgeschwindigkeit des Tangentialfeldes keine einfache Definition besitzt. Außerdem ist die Ergebnisformel $\kappa = 1/r$ auf \mathbb{S}^2 unbrauchbar, denn der Äquator muss als Kürzeste einerseits die Krümmung 0 haben, andererseits ist er ein Kreis vom Radius $r = \pi/2$ um den Nordpol.

In der Differentialgeometrie sind von Anfang an "Nachbarkurven" wichtig gewesen – nicht nur die sehr allgemeinen Nachbarkurven der Variationsrechnung sondern auch sehr speziell konstruierte. In dem jetzigen Zusammenhang sind das *Parallelkurven* zu einer gegebenen Kurve c . Dazu braucht man ein Einheitsnormalenfeld $n(t) \perp c'(t)$ und mit dessen Hilfe definiert man die Parallelkurve c_ϵ im Abstand ϵ durch

$$c_\epsilon(t) := c(t) + \epsilon \cdot n(t).$$

Bemerkung. Im 2-dimensionalen Fall gilt: Für jedes t sind die Krümmungskreise der Parallelkurven c_ϵ an der Stelle t Parallelkreise zu dem Krümmungskreis von c an der Stelle t .

Durch Nachrechnen findet man für die Krümmung $\kappa_\epsilon(t)$ der Kurve c_ϵ an der Stelle t

$$\kappa_\epsilon(t) = \frac{1}{|c'_\epsilon(t)|} \cdot \frac{d}{d\epsilon} |c'_\epsilon(t)|.$$

Wegen der Bemerkung über die Krümmungskreise genügt es, dies für konzentrische Kreise nachzurechnen, also die Bogenlänge $L(r) = 2\pi r$ logarithmisch zu differenzieren:

$$\frac{L'(r)}{L(r)} = \frac{1}{r} = \kappa_{kreis}(r).$$

Die Herleitung dieser neuen Formel für die quantitative Krümmungsgröße hat nun den Vorteil, dass sie in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie wörtlich wiederholt werden kann. Man muss nur die Geraden in Normalenrichtung bei der Konstruktion der Parallelkurven durch Kürzeste in Normalenrichtung ersetzen. (Mit dieser Formulierung können Parallelkurven sogar auf beliebigen Flächen definiert werden; allerdings gibt es die expliziten Krümmungskreise nur in den Standardgeometrien.) Auf \mathbb{S}^2 hat man die Parallelkurven explizit:

$$c_\epsilon(t) := c(t) \cdot \cos(\epsilon) + \left(\frac{c'(t)}{|c'(t)|} \times c(t) \right) \cdot \sin(\epsilon),$$

Für den Umfang von Kreisen vom Radius ϑ gilt $L_{\mathbb{S}^2}(\vartheta) = 2\pi \sin(\vartheta)$. Und die logarithmische Ableitung gibt die in der sphärischen Geometrie gültige Formel für die Krümmung von Kreisen:

$$\kappa_S(\vartheta) = \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \cot(\vartheta).$$

Diese Formel passt nun zu unseren Erwartungen: Der Äquator bekommt als Kreis vom Radius $\vartheta = \pi/2$ die Krümmung 0, die er als Kürzeste der sphärischen Geometrie haben muss. Und für sehr kleine Radien $0 < \vartheta \ll 1$ ist der Unterschied zum Euklidischen Fall klein wegen $\cot(\vartheta) \approx 1/\vartheta$.

Euklidische Zusammenfassung (eingerahmte Formel S.19 für den Krümmungsradius):
Für 2-mal stetig differenzierbare Kurven c mit $|c'(t)| = \text{const}$ ist

$$\boxed{\text{die Krümmungsfunktion } \kappa_E(t) := 1/r(t) = |c''(t)|/|c'(t)|^2.}$$

Man definiert auch den zugehörigen Krümmungsvektor (in diesem Text kaum benutzt):
Krümmungsvektor = $c''(t)/|c'(t)|^2$.

Das gilt jetzt für alle Kurven im \mathbb{R}^n , egal ob sie auf Flächen liegen oder nicht. Kreise auf \mathbb{S}^2 vom sphärischen Radius ϑ haben also im \mathbb{R}^3 den Radius $\sin(\vartheta)$ und daher die Euklidische Krümmung $\kappa_E(\vartheta) = 1/\sin(\vartheta)$, während sie auf \mathbb{S}^2 die Krümmung $\kappa_S = \cot(\vartheta)$ haben. Kann man diesen Unterschied so verstehen, dass man die Definition der *Krümmung einer Kurve auf einer Fläche* daraus ablesen kann?

Der Winkel zwischen der Ebene dieses Kreises und der Tangentialebene von \mathbb{S}^2 in einem Punkt P des Kreises ist ebenfalls $= \vartheta$. Also folgt: Schreibt man den Krümmungsvektor als Summe seiner Tangential- und seiner Normal-Komponente, so ist die Länge der Tangentialkomponente gerade $\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \cos \vartheta = \cot(\vartheta) = \kappa_S(\vartheta)!!$

In einem Flächenpunkt P mit Vektor v und Normalvektor N definieren wir

$$\text{Tangentialkomponente}(v) = v^{\text{tang}} := v - (v \bullet N) \cdot N.$$

In Punkten $P \in \mathbb{S}^2$ gilt $N = P$.

Sphärisches Ergebnis:

Für 2-mal stetig differenzierbare Kurven c auf \mathbb{S}^2 mit $|c'(t)| = \text{const}$ ist

$$\boxed{\text{die sphärische Krümmungsfunktion } \kappa_S(t) := |c''(t)^{\text{tang}}|/|c'(t)|^2.}$$

Und dies ist keine aus höherer Einsicht hingeschriebene Definition, sondern sie ist daraus entwickelt, dass die Krümmung quantitativ kontrollieren soll, wie sich die Kurvenlänge in einer Schar von Parallelkurven ändert. Da das Ergebnis sich offensichtlich leicht auf Kurven auf beliebigen Flächen verallgemeinern läßt, haben wir mit diesen sphärischen Betrachtungen sogar den Anfang der Differentialgeometrie erreicht. Was ich einstweilen sphärische Krümmung nenne hat dort den Namen *geodätische Krümmung*.

Anwendung. Für Kurven c in \mathbb{R}^2 , die mit der Bogenlänge parametrisiert sind (also $|c'(t)| = 1$), kann man mit Hilfe der 90° Drehung D^{90} die Definition der Krümmung so verwenden:

$$c''(t) = \kappa_E(t) \cdot D^{90} \cdot c'(t).$$

Für diese Differentialgleichung für c' kann man mit Hilfe einer Stammfunktion

$$W(t) := \int_{t_0}^t \kappa_E(\tau) d\tau$$

eine Lösung angeben: Wähle eine Orthonormalbasis $T, B = D^{90} \cdot T$, dann ist

$$c'(t) := \cos(W(t)) \cdot T + \sin(W(t)) \cdot B$$

eine Lösung, denn $c''(t) = \kappa_E(t) \cdot (-\sin(W(t)) \cdot T + \cos(W(t)) \cdot B) = \kappa_E(t) \cdot D^{90} \cdot c'(t)$.

Eine weitere Integration liefert eine Kurve c mit der **gegebenen Krümmungsfunktion**:

$$\boxed{c(t) := p_0 + \int_{t_0}^t (\cos(W(\tau)) \cdot T + \sin(W(\tau)) \cdot B) d\tau}$$

Mit der Krümmungsfunktion κ_E ist also eine gute Invariante einer 2-mal stetig differenzierbaren Kurve in \mathbb{R}^2 gefunden worden und *die Rekonstruktion von c aus κ_E heißt **Hauptsatz der Kurventheorie***. Dasselbe zeigt man mit der Funktion κ_S für sphärische Kurven.

2-dimensional: Kurvenkrümmung mit Vorzeichen

In \mathbb{R}^2 und in \mathbb{S}^2 können wir links herum und rechts herum umlaufene Kreise unterscheiden. Verabredet wird, die Krümmung der links herum umlaufenden Kreise *positiv* und die der gespiegelten Kreise *negativ* gekrümmt zu nennen. In \mathbb{R}^2 und in \mathbb{S}^2 haben wir bekanntlich eine *positive* 90° Drehung. Mit deren Hilfe wird die endgültige Definition der *Kurvenkrümmung mit Vorzeichen* formuliert. ($|c'(t)| = \text{const}$ wird weiter vorausgesetzt.)
Euklidisch:

$$\text{Krümmungsfunktion } \kappa_E(t) := (c''(t) \bullet D^{90}c'(t))/|c'(t)|^3.$$

Sphärisch:

$$\text{Krümmungsfunktion } \kappa_S(t) := (c''(t) \bullet D^{90}c'(t))/|c'(t)|^3.$$

(Das Skalarprodukt $c''(t) \bullet D^{90}c'(t)$ ignoriert die Normalkomponente von $c''(t)$.)

Während die Krümmungsfunktion von Kurven in Dimensionen > 2 (als Betrag) nicht negativ ist, kann sie im 2-dimensionalen Fall das Vorzeichen wechseln.

Kommentar zur Flächenkrümmung

Beim Betrachten von Flächen hat vielleicht die Normalkomponente des Krümmungsvektors von Kurven auf der Fläche den größten Einfluss. Sie beschreibt, wie die Flächen im \mathbb{R}^3 in Richtung der Kurve gebogen sind. Beispiel: Die Großkreise der Sphäre haben $\kappa_S = 0$ und wie sie im Raum gekrümmt sind, bestimmt, wie wir die Sphäre wahrnehmen. Das ist der Anfang der Krümmungstheorie von Flächen in der Differentialgeometrie. Diese Theorie ist deutlich komplizierter, als was ich bisher erklärt habe. Sie passt meiner Meinung nach nicht zum Niveau dieses Textes.

Wenn in der Kosmologie von *Krümmung des Raumes* gesprochen wird, dann ist das *nicht* analog zur Krümmung von Flächen in einem *umgebenden* Raum. So wie die Kurvenkrümmung κ_S sich nicht ändert, wenn die ganze Fläche *längentreu* abgebildet wird, so gibt es auch die *Gaußsche Krümmung* einer Fläche, die sich ebenfalls bei *längentreuen* Abbildungen nicht ändert. Sie ist zwar ursprünglich anders definiert, aber später wurde entdeckt, dass auch sie gefunden werden kann, wenn man Veränderungen in Scharen von Parallelkurven ansieht und damit als offensichtlich herausstellt, dass sie sich unter längentreuen Abbildungen nicht ändert. Alle auf Seite 14 abgebildeten Flächen haben dieselbe Gaußsche Krümmung. Es ist diese für das Auge weniger auffallende Krümmung, die analog ist zur Raumkrümmung der Kosmologie.

Wegen $\cot' = -1 - \cot^2$ gilt für die sphärischen Krümmungen $\kappa_S(\vartheta)$ in einer Parallelschar von Kreisen (und allgemeiner für die geodätische Krümmung $\kappa_F(t)$ auf Flächen):

Euklidisch: $\kappa'_E(r) + 0 + 1/r^2 = 0$

Sphärisch: $\kappa'_S(\vartheta) + 1 + \cot(\vartheta)^2 = 0$

Allgemein: $\kappa'_F + \text{const} + \kappa_F^2 = 0$

Die Ableitung von κ_F in einer Parallelschar von Kurven liefert *immer* solch eine Riccatische Gleichung. Die Konstante *const* hängt von dem Punkt P auf der Fläche ab, an dem differenziert wird. *Die Gaußsche Krümmung ist gleich dieser Konstanten, $K(P) = \text{const}(P)$.* Das Ergebnis hängt *nicht* davon ab, welche Scharen von Parallelkurven betrachtet werden.

11. Anhang: Hauptsatz für sphärische Kurven

Dieser Satz kann nicht, wie im Euklidischen Fall, einfach durch Hinschreiben von Stammfunktionen bewiesen werden, man muss mit gewöhnlichen Differentialgleichungen argumentieren. Das passt zwar nicht zum übrigen Stil dieses Textes, ist aber inhaltlich ein passender Abschluss der sphärischen Geometrie.

Parametrisiert man eine sphärische Kurve c mit ihrer Bogenlänge, so bilden die Vektoren $c'(t)$ (Tangentialvektor), $c(t)$ (Normalenvektor $N(t)$ der Sphäre), $\eta(t) := c(t) \times c'(t)$ (Normalenvektor der Kurve tangential an \mathbb{S}^2) für jedes t eine Orthonormalbasis vom \mathbb{R}^3 . Die Aufgabe ist, mit Hilfe der sphärischen Krümmung $\kappa_S(t)$ aus Anfangsdaten $c'(0), c(0), \eta(0)$ die Kurve $c(t)$ zu rekonstruieren. Beachte dazu, dass die positive 90° Drehung um $N(t) = c(t)$ den Tangentialvektor $c'(t)$ in den Normalenvektor $\eta(t)$ dreht. Ferner, da die drei Vektoren auf einander senkrechte Einheitsvektoren sind, ist die Ableitung jedes Vektors Linearkombination der beiden anderen.

Also: $(c')'(t) = a \cdot c(t) + b \cdot \eta(t)$ mit $a = c''(t) \bullet c(t)$, $b = c''(t) \bullet \eta(t)$.

Aus $c'(t) \bullet c(t) = 0$ folgt: $c''(t) \bullet c(t) + c'(t) \bullet c'(t) = 0$, also $a = c''(t) \bullet c(t) = -1$

und aus $c''(t) \bullet \eta(t) = c''(t) \bullet D^{90}c'(t)$ folgt: $b = \kappa_S(t)$.

Schließlich: $\eta(t) \bullet c(t) = 0$ gibt $\eta'(t) \bullet c(t) + \eta(t) \bullet c'(t) = 0$

und $\eta(t) \bullet c'(t) = 0$ gibt $\eta'(t) \bullet c'(t) + \eta(t) \bullet c''(t) = 0$.

Wir haben also die folgende 9-dimensionale lineare Differentialgleichung:

$$\text{Frenetgleichung für } \mathbb{S}^2 \quad \begin{cases} (c')'(t) = -c(t) + \kappa_S(t) \cdot \eta(t) \\ (c)'(t) = c'(t) \\ \eta'(t) = -\kappa_S(t) \cdot c'(t) \end{cases}$$

Es genügt nun nicht, den üblichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu zitieren, weil dieser Satz *nicht* mitliefert, dass die Lösungsvektoren $c'(t), c(t), \eta(t)$ *orthonormal* bleiben! Um das zu klären, wählen wir symmetrischere Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} e_1'(t) &= a_{12}(t) \cdot e_2(t) + a_{13}(t) \cdot e_3(t) \\ e_2'(t) &= a_{21}(t) \cdot e_1(t) + a_{23}(t) \cdot e_3(t) \\ e_3'(t) &= a_{31}(t) \cdot e_1(t) + a_{32}(t) \cdot e_2(t) \end{aligned}$$

mit: $a_{21} = -a_{12}$, $a_{31} = -a_{13}$, $a_{32} = -a_{23}$, (*wichtig*)

Um zu zeigen, dass die Lösungen bei orthonormalen Anfangsdaten orthonormal bleiben, definieren wir Hilfsfunktionen

$$f_{ij}(t) := e_i(t) \bullet e_j(t) = f_{ji}(t), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Diese sind Lösungen einer weiteren 6-dimensionalen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} f_{ii}'(t) &= 2 \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot f_{ij}(t), \\ f_{ij}'(t) &= e_i'(t) \bullet e_j(t) + e_j'(t) \bullet e_i(t), \quad i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\} \\ &= a_{ij} \cdot f_{jj}(t) + a_{ik} \cdot f_{jk}(t) + a_{ji} \cdot f_{ii}(t) + a_{jk} \cdot f_{ik}(t) \end{aligned}$$

Und dieses System wird wegen $a_{ij} = -a_{ji}$ **eindeutig(!)** und explizit gelöst durch

$$f_{ii}(t) := 1, \quad f_{ij}(t) := 0, \quad i \neq j \in \{1, 2, 3\}.$$

Damit sind die ebenfalls eindeutigen Lösungen $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ und $c'(t), c(t), \eta(t)$ der beiden 9-dimensionalen Differentialgleichungen orthonormal und die sphärische Kurve $c(t)$ hat die gegebene sphärische Krümmung $\kappa_S(t)$.

Der Hauptsatz der sphärischen Kurventheorie ist bewiesen.