Einführung in die Algebra — Übungsblatt 9

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 14. Dezember 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (5 Punkte $= 5 \cdot 1$)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. Sei $M/\!\!/L$ und $L/\!\!/K$ Körpererweiterungen.

(a) Wenn $M/\!\!/K$ algebraisch ist, dann sind auch $M/\!\!/L$ und $L/\!\!/K$ algebraisch.
(b) Wenn $M/\!\!/L$ und $L/\!\!/K$ beide endlich sind, dann ist auch $M/\!\!/K$ endlich.
(c) Sei $L/\!\!/\mathbb{R}$ eine algebraische Körpererweiterung mit L algebraisch abgeschlossen. Dann gilt $[\![L : \mathbb{R}]\!] = 2$.
(d) Es gibt keine Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$ außer $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$.
Hinweis: die reelle Zahl $e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5}$ *ist eine Wurzel des Polynoms* $t^2 + t - 1$.
(e) Es gibt keine Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})$ außer $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q})$, wobei p, q Primzahlen sind.

Aufgabe 2. (6 Punkte $= 2 + 2 + 1 + 1$)

Für eine Menge I betrachten wir die Menge $\mathbb{N}^{(I)}$ aller Familien $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$ und mit $a_i = 0$ für alle $i \in I$ außer einer endlichen Teilmenge. Es gibt auf $\mathbb{N}^{(I)}$ eine Addition, die komponentenweise definiert ist, mit neutralem Element die Familie $0 = (a_i)_{i \in I}$ mit $a_i = 0$ für alle $i \in I$. Für einen kommutativen Ring R definieren wir jetzt $R[(t_i)_{i \in I}]$ gleich der Menge aller Abbildungen $f \colon \mathbb{N}^{(I)} \to R$ mit $f(a) = 0_R$ für alle $a \in \mathbb{N}^{(I)}$ außer einer endlichen Teilmenge. Die Addition ist komponentenweise definiert, $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$, und die Multiplikation ist durch $(f \cdot g)(a) = \sum f(b)g(c)$ definiert, wobei wir über alle Paare $(b, c) \in \mathbb{N}^{(I)} \times \mathbb{N}^{(I)}$ mit $a = b + c$ summieren.

Für $j \in I$ definieren wir das Element $t_j \in R[(t_i)_{i \in I}]$ als f, wobei $f(a) = 1_R$ wenn $a = (a_i)_{i \in I}$ mit $a_j = 1$ und $a_i = 0$ für $i \neq j$ und $f(a) = 0_R$ sonst. Es gibt einen injektiven Ringhomomorphismus $R \to R[(t_i)_{i \in I}]$, definiert durch $r \mapsto f_r$, wobei $f_r(a) = 0_R$ für alle $a \in \mathbb{N}^{(I)}$ mit $a \neq 0$ und $f_r(0) = r$. Deshalb können wir R als Unterring von $R[(t_i)_{i \in I}]$ betrachten.

(a) Prüfen Sie nach, dass dies ein kommutativer Ring bildet.
(b) Zeigen Sie die universelle Eigenschaft: Sei S ein kommutativer Ring, $\phi \colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $s = (s_i)_{i \in I}$ eine Familie mit $s_i \in S$ für alle $i \in I$. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathrm{ev} \colon R[(t_i)_{i \in I}] \to S$ mit $\mathrm{ev}|_R = \phi$ und $\mathrm{ev}(t_j) = s_j$ für jedes $j \in I$.
(c) Sei I endlich mit $|I| = n$. Zeigen Sie, dass $R[(t_i)_{i \in I}]$ als Ring zu $R[t_1, \ldots, t_n]$ isomorph ist.
(d) Sei jetzt $L/\!\!/K$ eine Körpererweiterung, J eine Menge, $f_1, \ldots, f_n \in J$ paarweise verschiedene Elemente und $a_1, \ldots, a_n \in L$ Elemente. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathrm{ev} \colon K[(X_f)_{f \in J}] \to L[(X_f)_{f \in J}]$ mit $\mathrm{ev}(\lambda) = \lambda$ für $\lambda \in K$, $\mathrm{ev}(X_{f_i}) = a_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\mathrm{ev}(X_f) = X_f$ für $f \in J \smallsetminus \{f_1, \ldots, f_n\}$.

Aufgabe 3. (9 Punkte $= 2 + 2 + 2 + 3$)

Sei $M/\!\!/K$ eine Körpererweiterung und L_1, L_2 zwei Zwischenkörper, d.h. $M/\!\!/L_i$ und $L_i/\!\!/K$ für $i = 1, 2$. Das Kompositum $L_1 \cdot L_2$ ist der kleinste Unterkörper von M, der die Teilmenge $L_1 \cup L_2$ enthält. Zeigen Sie:

(a) $L_1 \cdot L_2 = L_1(L_2) = L_2(L_1)$.
(b) Wenn $L_1/\!\!/K$ und $L_2/\!\!/K$ beide algebraisch sind, dann ist auch $L_1 \cdot L_2/\!\!/K$ algebraisch.
(c) Wenn $L_1/\!\!/K$ und $L_2/\!\!/K$ beide endlich sind, dann ist

$$[\![L_1 \cdot L_2 : K]\!] \leqslant [\![L_1 : K]\!] \cdot [\![L_2 : K]\!].$$

Wenn $[\![L_1 : K]\!]$ und $[\![L_2 : K]\!]$ teilerfremd sind, dann gilt oben die Gleichheit.
(d) Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $[\![\mathbb{Q}(a, b) : \mathbb{Q}]\!] = n$, wobei:
  (i) $a = e^{2\pi i/5}$, $b = \sqrt[3]{2}$ und $n = 12$,
  (ii) $a = e^{\pi i/3}$, $b = \sqrt[4]{2}$ und $n = 8$.