Einführung in die Algebra — Übungsblatt 13

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 25. Januar 2018, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (6 Punkte $= 1 + 2 + 2 + 1$)

Seien $f(t) = t^3 - 3t - 1 \in \mathbb{Q}[t]$ und $L /\!\!/ \mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von $f(t)$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) $f(t)$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und hat keine mehrfache Nullstellen in L.
(b) Es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathrm{Gal}(L /\!\!/ \mathbb{Q}) \to S_3$, dessen Bild entweder A_3 oder S_3 ist.
(c) Wenn a eine Nullstelle von $f(t)$ in L ist, dann sind $a^2 - a - 2$ und $2 - a^2$ die beiden anderen. Folgern Sie, dass φ nicht surjektiv ist, und deshalb, dass $\mathrm{Gal}(L /\!\!/ \mathbb{Q})$ isomorph zu A_3 ist.
(d) Wie viele Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ gibt es?

Aufgabe 2. (7 Punkte $= 4 + 3$)

In den folgenden Beispielen, zeigen Sie, dass $L /\!\!/ \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L /\!\!/ \mathbb{Q})$ und alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$.

(a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,
(b) $L = \mathbb{Q}(e^{2\pi \mathrm{i}/5})$.

Hinweis zu (a): vergleichen Sie L mit dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
Hinweis zu (b): schauen Sie sich den Hinweis zu Aufgabe 1(d) auf Blatt 9 an.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Seien $L /\!\!/ K$ eine endliche Körpererweiterung und $M /\!\!/ K$ eine beliebige Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass

$$|\mathrm{Hom}_K(L, M)| \leqslant [\![L : K]\!],$$

wobei $\mathrm{Hom}_K(L, M) = \{\varphi\colon L \to M \mid \varphi \text{ ist ein } K\text{-Homomorphismus von Körpern}\}$. Hinweis: betrachten Sie zunächst den Fall $L = K(a)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte $= 4 \cdot 1$)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Sei $M /\!\!/ K$ eine separable Körpererweiterung und sei $K \subseteq L \subseteq M$ ein Zwischenkörper. Dann sind beide Erweiterungen $M /\!\!/ L$ und $L /\!\!/ K$ auch separabel.
(b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\pi, \mathrm{i}) /\!\!/ \mathbb{Q}(\pi)$ ist Galois.
(c) Wenn $L /\!\!/ K$ eine endliche Galoiserweiterung ist, dann gibt es genau $[\![L : K]\!]$ Zwischenkörper.
(d) Sei $L /\!\!/ K$ eine endliche Galoiserweiterung mit keinen Zwischenkörpern außer K und L. Dann muss $[\![L : K]\!]$ eine Primzahl sein.