Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2008**

Seminar: Lineare Algebraische Gruppen

Wir arbeiten im Seminar im wesentlichen den ersten Teil des Buches [S] von Springer durch. Alle Verweise unten beziehen sich auf dieses Buch.

Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Fall eines *algebraisch abgeschlossenen* Grundkörpers. Sofern es die Beweise vereinfacht, darf man annehmen, dass dieser Grundkörper Charakteristik 0 hat. Besonderer Wert soll darauf gelegt werden, alle Begriffe über lineare algebraische Gruppen in den Fällen der klassischen Gruppen explizit zu machen.

1) Varietäten

Abschnitte 1.1-1.7 (siehe auch [GW], Kap. 1). Dieser Vortrag hat eher den Charakter einer "Wiederholung". Es wird erwartet, dass sich alle Seminarteilnehmer mit diesem Material im Vorfeld vertraut machen.

2) Dimension, Satz von Chevalley, vollständige Varietäten

Abschnitte 1.8, 1.9 (einschl. dem Satz von Chevalley: Ex. 1.9.6 (1)), und Abschnitt 6.1 über vollständige Varietäten. Bei Theorem 6.1.3 kann man gegebenenfalls den Beweis durch ein Beispiel ersetzen.

3) Derivationen und Tangentialraum

Abschnitte 4.1-4.3. Diese Begriffe brauchen wir, um die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe zu definieren.

4) Topologische Eigenschaften von Morphismen

Abschnitte 5.1, 5.2. Besonders wichtig ist Zariskis Hauptsatz (Theorem 5.2.8).

5) Lineare Algebraische Gruppen: Definition, erste Eigenschaften

Wir beginnen nun mit dem Studium linearer algebraischer Gruppen; Abschnitte 2.1–2.3. Der wichtigste Satz in diesem Vortrag ist Theorem 2.3.7.

6) Jordan-Zerlegung; Kommutative lineare algebraische Gruppen

Wir betrachten die Jordan-Zerlegung, Abschnitt 2.4, und wenden sie wie in 3.1 erklärt an, um die Struktur kommutativer linearer alg. Gruppen zu verstehen. Anschließend behandeln wir ausführlich den Fall diagonalisierbarer Gruppen (Abschnitt 3.2). Das Theorem 3.4.9, das den Fall kommutativer unipotenter Gruppen klärt, sollte ohne Beweis angegeben werden (vielleicht kann man einen Beweis in Charakteristik 0 mit Hilfe der Exponentialabbildung erklären).

7) Die Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe

Die Lie-Algebra ist ein wichtiges Hilfsmittel, um geometrische Fragen auf Probleme linearer Algebra zurückzuführen. Abschnitt 4.4. Eine erste Anwendung ist der Satz von Lang, Theorem 4.4.17.

8) Quotienten

Wir betrachten homogene Räume, Abschnitt 5.3, und konstruieren dann Quotienten einer Gruppe nach einer Untergruppe: Abschnitt 5.5.

9) Borel-Untergruppen, parabolische Untergruppen

Abschnitt 6.2. Wichtige Sätze sind Borels Fixpunktsatz (Thm. 6.2.6); alle Borel-Gruppen sind zueinander konjugiert (Thm. 6.2.7). Beispiele (Ex. 6.2.11). Abschnitt 6.3 bis einschl. Lemma 6.3.4, insbesondere der Satz von Lie-Kolchin (Theorem 6.3.1)

10) Maximale Tori

Abschnitt 6.3 ab Theorem 6.3.5, und Abschnitt 6.4. Je zwei maximale Tori sind zueinander konjugiert (Theorem 6.4.1). Der Normalisator einer Borel-Untergruppe (Theorem 6.4.9). Für die Beweise erlauben wir uns zur Vereinfachung, uns auf den Fall von Charakteristik 0 einzuschränken. Siehe auch [D], Kap. 12.

11) Die Weyl-Gruppe; halbeinfache Gruppen vom Rang 1

Die Weyl-Gruppe ist eine endliche Gruppe, die einer algebraischen Gruppe zusammen mit einem maximalen Torus zugeordnet ist, und wichtige Informationen über die Gruppe enthält; wir definieren und untersuchen sie wie in Abschnitt 7.1. Abschnitt 7.2 folgend soll dann der Fall halbeinfacher Gruppen vom Rang 1 betrachtet werden. Es zeigt sich (Theorem 7.2.4), dass dies gerade die Gruppen SL_2 und PSL_2 sind.

12) Wurzeldaten

Wir kommen zum Begriff des Wurzeldatums einer algebraischen Gruppe. Zu behandeln sind die Abschnitte 7.3, 7.4, 7.5. Es sollten zumindest einige der Beispiele (Ex. 7.4.7) behandelt werden. Die Rechnungen in 7.5 kann man kurz abhandeln (bzw. die Aussage an einem Beispiel erläutern).

Man kann zeigen, dass reduktive Gruppen durch ihre Wurzeldaten klassifiziert werden: zwei solche Gruppen sind genau dann isomorph, wenn die Wurzeldaten isomorph sind, und zu jedem Wurzeldatum gibt es eine reduktive Gruppe.

13) Struktur reduktiver Gruppen

Wir kommen nun zur Strukturtheorie reduktiver Gruppen. Abschnitte 7.6, 8.1, 8.2.

14) Die Bruhat-Zerlegung

Zum Abschluss behandeln wir die Bruhat-Zerlegung (Abschnitt 8.3), und die Struktur der Menge aller parabolischen Untergruppen, Abschnitt 8.4. Auch hier sollten Beispiele in den Fällen der klassischen Gruppen gegeben werden. Für die GL_n sollte ein elementarer Beweis der Bruhat-Zerlegung erklärt werden.

Literatur

[B] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer Graduate Text in Math. **126**, Second enlarged edition.

[D] J. Draisma, *Notizen zur Vorlesung über Lineare Algebraische Gruppen*, http://www.math.unibas.ch/~draisma/teaching/algp/

[GW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraische Geometrie*, siehe http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/alggeom1.html für einzelne Kapitel.

[H] J. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer Graduate Text in Math. **21**.

[M] J. Milne, *Algebraic Groups and Arithmetic Groups*, siehe http://www.jmilne.org/math/, Course Notes.

[S] T. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkäuser Progress in Math. **9**, Second edition.