Shimura-Varietäten II

Ulrich Görtz
http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/shimura.html

4. Mai 2006

Adele: Definition

Ring der Adele

$$\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \prod_{p \text{ Primzahl}} (\mathbb{Q}_p | \mathbb{Z}_p)$$

Ring der endlichen Adele

$$\mathbb{A}_f := \prod_{p \text{ Primzahl}} (\mathbb{Q}_p | \mathbb{Z}_p) = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

Haben Diagonaleinbettung $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{A}$.
Analog für $E/\mathbb{Q}$ Zahlkörper: $\mathbb{A}_E$, $\mathbb{A}_{E,f}$.

$\mathbb{A}_f$-wertige Punkte einer alg. Gruppe

Sei G eine algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$. Versehen $G(\mathbb{A}_f)$ mit Topologie wie folgt:

Wähle Einbettung $G \longrightarrow GL_N$ und setze

$$G(\mathbb{Z}_\ell) = G(\mathbb{Q}_\ell) \cap GL_N(\mathbb{Z}_\ell).$$

Dann ist

$$G(\mathbb{A}_f) = \prod (G(\mathbb{Q}_\ell) | G(\mathbb{Z}_\ell)),$$

und diese Darstellung liefert Topologie auf $G(\mathbb{A}_f)$, unabhängig von der Einbettung $G \longrightarrow GL_N$.

Kongruenzuntergruppen

$G/\mathbb{Q}$ reduktive alg. Gruppe, $G \longrightarrow GL_n$ Einbettung.

$$\Gamma(N) = G(\mathbb{Q}) \cap \{g \in GL_n(\mathbb{Z});\ g \equiv E_n \mod N\}$$

Definition

Eine Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe, die ein $\Gamma(N)$ als Untergruppe von endlichem Index enthält:

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subset G(\mathbb{Q}).$$

Satz

Die Kongruenzuntergruppen von $G(\mathbb{Q})$ sind genau die Untergruppen der Form $K \cap G(\mathbb{Q})$, wo $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ kompakt offen.

Starke Approximation

Theorem

Sei $G/\mathbb{Q}$ eine halbeinfache, einfach zusammenhängende algebraische Gruppe von nicht-kompaktem Typ. Dann ist $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{A}_f)$.

Reelle Approximation, Hasse-Prinzip

Theorem

Sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$. Dann ist $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{R})$.

Theorem

Sei $G/\mathbb{Q}$ eine einfach zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe. Dann erfüllt G das Hasse-Prinzip, d. h. die Abbildung

$$H^1(\mathbb{Q}, G) \longrightarrow \prod_{v \in \mathrm{Pl}(\mathbb{Q})} H^1(\mathbb{Q}_v, G_{\mathbb{Q}_v}) = H^1(\mathbb{R}, G_{\mathbb{R}})$$

ist injektiv.

Ziel

Verallgemeinerung der Ergebnisse für Modulkurven $\Gamma\backslash\mathbb{H}$

Insbesondere: Modell über Zahlkörper
Darum (und/bzw. um geeignete Γ's zu produzieren) starten wir mit reduktiver algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$.

Shimura-Daten

Definition

Ein Shimura-Datum ist ein Paar (G, X), bestehend aus einer reduktiven algebraischen Gruppe G über $\mathbb{Q}$ und einer $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von Homomorphismen $h\colon \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$, so dass gilt:

- SV1 Für alle $h \in X$ ist $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ vom Typ $(-1,1),(0,0),(1,-1)$.
- SV2 Die Involution $\mathrm{int}h(i)$ ist eine Cartan-Involution von $G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$.
- SV3 G^{ad} hat keinen über $\mathbb{Q}$ definierten Faktor H, so dass $H(\mathbb{R})$ kompakt ist.

Beispiel: $G = GL_2$

Beispiel

Sei $G = GL_{2,\mathbb{Q}}$, und sei X die $GL_2(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von

$$h_0 \colon \mathbb{S} \longrightarrow GL_{2,\mathbb{R}}, \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Haben Bijektion

$$X \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad gh_0g^{-1} \mapsto gi.$$

Satz

Sei (G, X) ein Shimura-Datum. Dann trägt X eine eind. best. Struktur einer kpl. Mf., so dass für jede Darstellung $\rho\colon G_{\mathbb{R}} \longrightarrow GL(V)$ die Familie $(V, \rho \circ h)_{h \in X}$ eine holom. Familie von HS ist.

Für diese kpl. Struktur ist jede solche Familie sogar eine Variation von HS. Insbes. ist X eine endl. disj. Vereinigung hermitesch symmetrischer Bereiche.

Definition

$K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen.

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Alternative Beschreibung

Ist $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$, so

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/KK_\infty$$

Satz

Sei $\mathscr{C} \subset G(\mathbb{A}_f)$ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f)/K$.
Sei X^+ eine Zusammenhangskomponente von X.
Dann

$$G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K \cong \coprod_{g \in \mathscr{C}} \Gamma_g \backslash X^+,$$

wobei $\Gamma_g = gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$.

Lemma

Sei $X^+ \subseteq X$ eine Zusammenhangskomponente. Dann ist die natürliche Abbildung

$$G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)$$

eine Bijektion.

Beweis.

surjektiv
Reelle Approximation: G zushgd. alg. Gp. $\Longrightarrow G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{R})$ dicht
$G(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf X

injektiv
Stabilisator von X^+ ist $G(\mathbb{R})_+$. □

Shimura-Varietäten

Definition

(G, X) Shimura-Datum. Die zugehörige Shimura-Varietät ist das inverse System

$$(\mathrm{Sh}_K(G, X))_K,$$

zusammen mit der unten beschriebenen $G(\mathbb{A}_f)$-Operation, wobei $K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ offen, kompakt, (hinreichend klein).

$G(\mathbb{A}_f)$-Operation

Für $g \in G(\mathbb{A}_f)$ haben wir

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}_K(G, X) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(G, X) \\ (x, a) & \mapsto & (x, ag) \end{array}$$

Zusammenhangskomponenten

Sei (G, X) ein Shimura-Datum, Z das Zentrum von G, $T = G/G^{\mathrm{der}}$ der größte abelsche Quotient von G. Haben $Z \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} T$.

Definiere

$$\begin{array}{rcl} T(\mathbb{R})^\dagger & = & \mathrm{im}(Z(\mathbb{R}) \longrightarrow T(\mathbb{R})) \\ T(\mathbb{Q})^\dagger & = & T(\mathbb{Q}) \cap T(\mathbb{R})^\dagger \end{array}$$

Beispiel

Ist $G = GL_2$, so ist $\nu = \det\colon GL_2 \to T \cong \mathbb{G}_m$, $T(\mathbb{Q})^\dagger = T(\mathbb{Q})^+ = \mathbb{Q}_{>0}$.

Theorem

Sei G^{der} einfach zusammenhängend.

1. *Es gilt $\nu(G(\mathbb{Q})_+) \subseteq T(\mathbb{Q})^\dagger$.*
2. *Für hinreichend kleine K induziert die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K & \xrightarrow{\cong} & \\ G(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K & \longrightarrow & T(\mathbb{Q})^\dagger\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K) \\ (x,g) & \mapsto & \nu(g) \end{array}$$

eine Bijektion

$$\pi_0(\mathrm{Sh}_K(G,x)) \xrightarrow{\cong} T(\mathbb{Q})^\dagger\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K)$$

Lemma

Sei G^{der} einfach zushgd., und sei $t \in T(\mathbb{Q})$. Es gilt $t \in T(\mathbb{Q})^\dagger$ genau dann, wenn t zu einem Element von $G(\mathbb{Q})_+$ liftet.

Beweis.

Mit dem Lemma

$$T(\mathbb{Q})^\dagger\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K) = \nu(G(\mathbb{Q})_+)\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K).$$

Betrachte Faser über 1 von

$$\begin{array}{rcl} G(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K & \longrightarrow & \nu(G(\mathbb{Q})_+)\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K) \\ (x,g) & \mapsto & \nu(g) \end{array}$$

Sehen: die Faser ist $\Gamma\backslash X^+$, wobei Γ das Bild von $K \cap G(\mathbb{Q})_+$ in $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$. □

Endlich viele Zusammenhangskomponenten

Satz

Ist T ein algebraischer Torus über $\mathbb{Q}$, so ist $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)$ kompakt.

Korollar

Die Menge $T(\mathbb{Q})^\dagger\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K)$ ist endlich.

Beweis.

Für $T = \mathbb{G}_m$ haben wir

$$T(\mathbb{A}_f)/T(\widehat{\mathbb{Z}}) = \mathbb{A}_f^\times/\widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \bigoplus_\ell \mathbb{Q}_\ell^\times/\mathbb{Z}_\ell^\times \cong \bigoplus_\ell \mathbb{Z},$$

die Gruppe der gebrochenen Ideale von $\mathbb{Z}$. Also

$$\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_f^\times/\widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}) = 1,$$

und $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_f^\times$ ist als Quotient von $\widehat{\mathbb{Z}}$ kompakt.

Entsprechendes gilt für Zahlkörper F anstelle von $\mathbb{Q}$: $F^\times\backslash\mathbb{A}_{F,f}^\times$ kompakt.

Da jeder Torus $/\mathbb{Q}$ über einem Zahlkörper spaltet, folgt die Behauptung. $\square$

Shimura-Varietäten für Tori

Sei $T/\mathbb{Q}$ ein Torus.

Jeder Homomorphismus $h \colon \mathbb{S} \longrightarrow T_{\mathbb{R}}$ definiert eine Shimura-Varietät.

$\mathrm{Sh}_K(T, X)$ endl. Menge

Betrachtet man allgemeiner statt $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklassen X endliche Überlagerungen von solchen, so kann man stets $\pi_0(\mathrm{Sh}_K)$ als null-dimensionale "gemischte Shimura-Varietät" auffassen.

Übergang zum proj. Limes

Der inverse Limes

$$\mathrm{Sh}(G, X) = \varprojlim_K \mathrm{Sh}_K(G, X)$$

existiert als Schema über $\mathbb{C}$ — dieses ist lokal noethersch und regulär, aber nicht von endlichem Typ.

Die Gruppe $G(\mathbb{A}_f)$ operiert von rechts auf $\mathrm{Sh}(G, X)$, und für $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen, gilt

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) = \mathrm{Sh}(G, X)/K.$$

Beispiel: Modulkurven

Sei $G = GL_2$, $X = \mathbb{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Die Shimura-Varietät $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ ist die Vereinigung der Modulkurven $\Gamma_i \backslash \mathbb{H}$, wobei die a_i ein Vertretersystem für $GL_2(\mathbb{Q})_+ \backslash GL_2(\mathbb{A}_f)/K$ in $GL_2(\mathbb{A}_f)$ bilden, und

$$\Gamma_i = SL_2(\mathbb{Q}) \cap a_i K a_i^{-1}.$$

Zusammenhangskomp. in diesem Fall

Die Abbildung

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{H}^\pm \times GL_2(\mathbb{A}_f)/K &= \\ GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/K \cdot K_\infty &\xrightarrow{\det} \mathbb{Q}^\times\backslash\{\pm 1\} \times \mathbb{A}_f^\times / \det(K) \end{aligned}$$

induziert

$$\pi_0(\mathrm{Sh}_K(GL_2, \mathbb{H}^\pm)) = \mathbb{Q}_{>0}\backslash\mathbb{A}_f^\times / \det(K)$$

Beispiel

Sei $K = \ker GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Dann ist $K \cap SL_2(\mathbb{Q}) = \Gamma(N)$.

Dann ist $\pi_0(\mathrm{Sh}_K) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$.

Gruppe der symplektischen Ähnlichkeiten

k Körper, char $k \neq 2$. Zu einem symplektischen k-VR (V, ψ) sei $GSp(V, \psi)$ definiert durch

$$GSp(V,\psi)(R) = \{g \in GL(V)(R); \\ \exists c(g) \in R^\times : \forall u, v : \psi(gu, gv) = c(g)\psi(u, v)\},$$

R eine k-Algebra. Definiere die symplektische Gruppe $Sp(V, \psi)$ durch

$$1 \longrightarrow Sp(V,\psi) \longrightarrow GSp(V,\psi) \xrightarrow{c} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1\ .$$

Es gilt $GSp(V, \psi)^{\mathrm{der}} = Sp(V, \psi)$.

Übersicht Adele Shimura-Var. Siegel-Fall Allg. Sh.-Var.

Beispiele

Beispiel

Ist $\dim V = 2$, so ist $GSp(V, \psi) = GL(V) \cong GL_2$, $Sp(V, \psi) \cong SL_2$.

Beispiel

$V = k^{2n}$, ψ gegeben durch $\begin{pmatrix} & -E_n \\ E_n & \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} GSp_{2n}(R) \quad = \quad & \{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix};\ \exists c \in R^\times : {}^tAC = {}^tCA,\ {}^tBD = {}^tDB, \\ & -{}^tAD + {}^tCB = cE_n,\ -{}^tBC + {}^tDA = cE_n\} \\ & \subseteq GL_{2n}(R). \end{aligned}$$

Das Shimura-Datum zu einem symplektischen VR

Sei (V, ψ) ein symplektischer $\mathbb{Q}$-VR, $G = GSp(V, \psi)$.

Ist $J \in G^{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$ eine komplexe Struktur auf $V(\mathbb{R})$, so erhalte HS $h_J \colon \mathbb{S} \longrightarrow G \subseteq GL(V)$ vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ auf V.

Wir nennen J positiv (negativ), wenn $\psi(u, Jv)$ positiv (negativ) definit ist.

Sei X^+ (bzw. X^-) die Menge der positiven (bzw. negativen) kompl. Str. auf $V(\mathbb{R})$, $X = X(V, \psi) = X^+ \coprod X^-$.

Übersicht Adele Shimura-Var. Siegel-Fall Allg. Sh.-Var.

$G(\mathbb{R})$ operiert auf X durch $g \cdot J := gJg^{-1}$.

Der Stabilisator von X^+ ist $G(\mathbb{R})^+ = \{g \in G(\mathbb{R});\ c(g) > 0\}$.

$Sp(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf X^+, und $G(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf X.

Mittels der Korrespondenz $J \mapsto h_J$ können wir X identifizieren mit einer $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von Morphismen $h \colon \mathbb{S} \longrightarrow G$.

Beh.: (G, X) ist ein Shimura-Datum.

(G, X) ist Shimura-Datum

SV1 Für alle $h \in X$ ist $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ vom Typ $(-1,1),(0,0),(1,-1)$.

Schreibe $V^+ = V^{-1,0}$, $V^- = V^{0,-1}$,

$\mathrm{End}(V(\mathbb{C})) =$	$(V^+,V^+)\oplus$	$(V^+,V^-)\oplus$	$(V^-,V^+)\oplus$	(V^-,V^-)
$h(z)$ op. als	1	$z/\overline{z}$	$\overline{z}/z$	1

Die Lie-Algebra ist

$$\mathrm{Lie}\,GSp(V,\psi) = \{f \in End(V(\mathbb{C}));\ \psi(f(u),v) + \psi(u,f(v)) = 0\}.$$

SV2 Die Involution $\mathrm{int}h(i)$ ist eine Cartan-Involution von $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$.

$h(i)^2 = -1$ liegt im Zentrum von $Sp(V,\psi)(\mathbb{R})$, und ψ ist eine $h(i)$-Polarisierung.

SV3 G^{ad} hat keinen über $\mathbb{Q}$ definierten Faktor H, so dass $H(\mathbb{R})$ kompakt ist.

$GSp(V,\psi)^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{Q}}$ ist einfach und $GSp(V,\psi)^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ ist nicht kompakt.

Sh_K als Modulraum von Hodge-Strukturen

Sei $\mathscr{H}_K$ die Menge von Tripeln $((W,h),s_0,\eta K)$, wo

- (W,h) eine HS vom Typ $(-1,0),(0,-1)$
- $\pm s_0$ eine Polarisierung von W
- ηK ein K-Orbit von Isom. $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} W(\mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein $\mathbb{A}_f^\times$-Vielfaches von s_0 abbildet.

Isomorphismen sind Isomorphismen

$$b\colon (W,h) \xrightarrow{\cong} (W',h'),$$

so dass

$$b(s_0) = cs_0',\ c \in \mathbb{Q}^\times, \qquad b\circ\eta = \eta' \quad \text{mod } K$$

Übersicht Adele Shimura-Var. Siegel-Fall Allg. Sh.-Var.

Ein Element $((W,h),s_0,\eta)$ entspricht einem symplektischen $\mathbb{Q}$-VR (W,s_0) mit einer komplexen Struktur, die positiv oder negativ für s_0 ist, und einer Bahn ηK.

Insbesondere ist $\dim V = \dim W$, also existiert ein Isomorphismus

$$a\colon W \xrightarrow{\cong} V,$$

der s_0 auf ein $\mathbb{Q}^\times$-Vielfaches von ψ abbildet.

Dann liegt

$$ah := (z \mapsto a\circ h(z)\circ a^{-1})$$

in X, und

$$V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\eta} W(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{a} V(\mathbb{A}_f)$$

liegt in $G(\mathbb{A}_f)$.

Ist $a' \colon W \xrightarrow{\cong} V$ ein anderer Isomorphismus, so existiert $q \in G(\mathbb{Q})$ mit $a' = q \circ a$. Ersetzt man a durch a', so wird $(ah, a \circ \eta)$ durch $(qah, qa \circ \eta)$ ersetzt.

Erhalten so wohldefinierte Abbildung

$$\mathscr{H}_K \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad (W, \dots) \mapsto (ah, a \circ \eta).$$

Satz

Diese Abbildung ist eine Bijektion

$$\mathscr{H}_K \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

Abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$

Definition

Sei k ein Körper. Eine abelsche Varietät ist ein zusammenhängendes, glattes, eigentliches Gruppenschema über k.

Ist A eine abelsche Varietät über $\mathbb{C}$, so hat A als komplexe Mf. die Form $\mathbb{C}^n/\Lambda$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ ein Gitter.
Es ist dann $\pi_1(A, 0) = \Lambda$, also

$$H_1(A, \mathbb{Z}) = \Lambda, \quad H^1(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}).$$

Algebraisierbarkeit komplexer Tori

Frage: Welche komplexen Tori $\mathbb{C}^n/\Lambda$ sind abelsche Varietäten, d. h. sind algebraisierbar?

Theorem

Ein kpl. Torus $\mathbb{C}^n/\Lambda$ ist genau dann algebraisierbar, wenn eine Riemann-Form Ψ existiert, d. h. eine alternierende Form

$$\Psi\colon \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z},$$

so dass $\Psi_{\mathbb{R}}(Ju, Jv) = \Psi_{\mathbb{R}}(u, v)$ für alle $u, v \in \Lambda \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}^n$, und $\Psi(u, Ju) > 0$ für $u \neq 0$.

Theorem (Riemann)

Der Funktor

$$A \mapsto H_1(A, \mathbb{Z})$$

ist eine Äquivalenz zwischen der

- *Kategorie AV der abelschen Varietäten $/\mathbb{C}$ und der*
- *Kategorie der polarisierbaren ganzen HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$.*

Sei $AV_{\mathbb{Q}}$ die Kategorie der ab. Var. über $\mathbb{C}$ bis auf Isogenie:
Objekte: Abelsche Varietäten $/\mathbb{C}$,
Morphismen: $\mathrm{Hom}_{AV_{\mathbb{Q}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{AV}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Korollar

Der Funktor

$$A \mapsto H_1(A, \mathbb{Q})$$

ist eine Äquivalenz zwischen $AV_{\mathbb{Q}}$ und der Kategorie der polarisierbaren rationalen HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$.

Sh als Modulraum abelscher Varietäten

Sei $\mathscr{M}_K$ die Menge von Tripeln $(A, s, \eta K)$, wo

- A eine abelsche Varietät der Dimension $g = \frac{1}{2} \dim V$ über $\mathbb{C}$
- $\pm s$ eine Polarisierung von $H_1(A, \mathbb{Q})$
- η ein Isomorphismus $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} H_1(A, \mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein $\mathbb{A}_f^\times$-Vielfaches von s abbildet.

Dabei sind zwei Tripel $(A, s, \eta K)$, $(A', s', \eta' K)$ isomorph wenn eine Isogenie $A \longrightarrow A'$ existiert, die s auf ein $\mathbb{Q}^\times$-Vielfaches auf s', und ηK auf $\eta' K$ abbildet.

Satz

Die Menge $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ *steht in natürlicher Weise in Bijektion zu* $\mathscr{M}_K / \cong$.

Quaternionenalgebren

Sei F ein Körper der Char. 0.

Definition

Eine Quaternionenalgebra über F ist eine F-Algebra B, so dass

- B ist zentral, d. h. das Zentrum von B ist F
- B ist einfach, d. h. B hat keine nicht-trivialen zweiseitigen Ideale
- $\dim_F B = 4$

Beispiel

- $M_2(F)$
- $F = \mathbb{R}$, $B = \mathcal{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ die Hamiltonschen Quaternionen ($i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$)

Quaternionenalgebren II

Satz

B Divisionsalgebra $\Longleftrightarrow B \ncong M_2(F)$

Konstruktion

Seien $a, b \in F$. Dann ist

$$B = F \oplus Fi \oplus Fj \oplus Fk$$

mit

$$i^2 = a, j^2 = b, ij = k = -ji$$

eine Quaternionenalgebra, und jede Quaternionenalgebra hat diese Form.

Quaternionenalgebren III

Satz

Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist jede Quaternionenalgebra über F isomorph zu $M_2(F)$.

Satz

Jede Quaternionenalgebra über $\mathbb{R}$ ist isomorph zu $M_2(\mathbb{R})$ oder zu $\mathcal{H}$.

Shimura-Kurven

Sei B eine Quaternionendivisionsalgebra über $\mathbb{Q}$ mit $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$.

Sei G die algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$ mit

$$G(R) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} R)^{\times} \text{ für } R \text{ eine } \mathbb{Q} - \text{Algebra.}$$

Dann gilt $G_{\mathbb{R}} = GL_{2,\mathbb{R}}$, also ist $X := \mathbb{H}^{\pm}$ eine $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von Homom. $\mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$.

(G, X) ist ein Shimura-Datum. $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ ist eine endliche Vereinigung von kompakten Riemannschen Flächen.

Nicht-modulare Shimura-Kurven

F total reeller Zahlkörper, $d = [F : \mathbb{Q}] > 1$.

B Quaternionenalgebra über F, die an genau einer unendlichen Stelle zerfällt.

$G/\mathbb{Q}$ definiert durch $G(R) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} R)^{\times}$

$h \colon \mathbb{S} \longrightarrow GL_{2,\mathbb{R}} \subset GL_{2,\mathbb{R}} \times \mathcal{H}^{\times} \times \cdots \times \mathcal{H}^{\times} = G_{\mathbb{R}}$

Erhalte Shimura-Datum $(G, \{h\})$.

Der Gewichtshomomorphismus

Der Gewichtshomomorphismus eines Shimura-Datums (G, X) ist

$$w_X \colon \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}.$$

Hat $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ eine natürliche Interpretation als Modulraum (von rationalen Hodge-Strukturen o. ä.), so ist w_X definiert über $\mathbb{Q}$.

Wie sehen daran, dass eine solche modulare Beschreibung für die Shimura-Kurven im vorherigen Beispiel nicht existiert.

Algebren mit Involution

k Körper. B k-Algebra, *insbes.* $\dim_k B < \infty$.

Involution: $*\colon B \to B$, k-linear, $(ab)^* = b^* a^*$, $a^{**} = a$.

Lemma

Sei k alg. abgeschl., sei $(B, *)$ eine halbeinfache k-Alg. mit Involution. Dann ist $(B, *)$ isomorph zu einem Produkt von Alg. mit Inv. der folg. Typen:

A $M_n(k) \times M_n(k)$, $(x, y)^* = ({}^t y, {}^t x)$,

C $M_n(k)$, $x^* = {}^t x$.

BD $M_n(k)$, $x^* = J \cdot {}^t x \cdot J^{-1}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$

PEL-Datum

- B halbeinfache $\mathbb{Q}$-Algebra mit (positiver) Involution $*$
- $V \neq 0$ ein treuer endlich erzeugter Links-B-Modul
- $\psi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine $*$-hermitesche nicht-ausgeartete alternierende Paarung:

$$\psi(bu, v) = \psi(u, b^* v)$$

Zugehörige algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}) &= \{g \in \mathrm{Aut}_B(V);\ \exists c(g) \in \mathbb{Q}^\times : \psi(gu, gv) = c(g)\psi(u, v)\} \\ &\subseteq GL(V) \end{aligned}$$

Sei $h_0\colon \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$, so dass V vom Typ $(-1,0),(0,-1)$ ist, und die Form $\psi(u, h(i)v)$ symmetrisch und positiv definit ist. Sei X die $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von h_0.

Lemma

Es ist (G, X) ein Shimura-Datum.

Satz

Sei $K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen. Dann parametrisiert $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ die Isomorphieklassen von Quadrupeln $(A, i, \overline{\lambda}, \eta K)$ mit

- *A eine abelsche Varietät $/\mathbb{C}$ bis auf Isogenie*
- *$i\colon B \longrightarrow \mathrm{End}(A)$, so dass*

$$\mathrm{Tr}(i(b), T_0 A) = \mathrm{Tr}(b|_{V(\mathbb{C})/F^0_{h_0} V(\mathbb{C})}) \text{ für alle } b \in B$$

- *$\overline{\lambda}$ eine homogene Polarisierung von A, die via i auf B die Involution $*$ induziert.*
- *ηK ist ein K-Orbit von $B \otimes \mathbb{A}_f$-linearen Isomorphismen*

$$\eta\colon V(\mathbb{A}_f) \longrightarrow H^1(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{A}_f,$$

  der ψ auf ein $\mathbb{A}_f^\times$-Vielfaches von s abbildet,

so dass gilt ...

... so dass gilt:

- Es ex. ein B-linearer Isom. $a\colon H_1(A, \mathbb{Q}) \longrightarrow V$, der die von $\overline{\lambda}$ induzierte Form auf ein $\mathbb{Q}^\times$-Vielfaches von ψ abbildet.
- Für die HS h auf $H_1(A, \mathbb{Q})$ gilt: $a^{-1} h a$ ist konjugiert zu h_0.

Morphismen von Shimura-Varietäten

Definition

Seien (G, X), (G', X') Shimura-Daten.

1. Ein Morphismus $(G, X) \longrightarrow (G', X')$ von Shimura-Daten ist ein Homomorphismus $G \longrightarrow G'$ algebraischer Gruppen, der X nach X' abbildet.
2. Ein Morphismus $\mathrm{Sh}(G, X) \longrightarrow \mathrm{Sh}(G', X')$ von Shimura-Varietäten ist ein inverses System von Morphismen von Varietäten, das kompatibel mit der $G(\mathbb{A}_f)$-Operation ist.

Theorem

Ein Morphismus $(G, X) \longrightarrow (G', X')$ *von Shimura-Daten induziert einen Morphismus* $\mathrm{Sh}(G, X) \longrightarrow \mathrm{Sh}(G', X')$ *von Shimura-Varietäten. Ist der Homom.* $G \longrightarrow G'$ *injektiv, so ist dieser eine abgeschlossene Immersion.*

Shimura-Varietäten vom Hodge-Typ

Definition

Eine Shimura-Varietät $\mathrm{Sh}(G, X)$ heißt Shimura-Varietät vom Hodge-Typ, falls ein symplektischer VR (V, ψ) über $\mathbb{Q}$ und ein injektiver Homomorphismus $\rho\colon G \longrightarrow GSp(V, \psi)$ existieren, der X nach $X(\psi)$ abbildet.

Shimura-Varietäten vom Hodge-Typ sind Modulräume von Hodge-Strukturen.

Sei $\mathrm{Sh}(G, X)$ eine Shimura-Varietät vom Hodge-Typ,
$G \longrightarrow GSp(V, \psi)$.

Lemma

Es existieren lineare Abbildungen $t_i : V^{\otimes n_i} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n$, *so dass* G *die Untergruppe von* $GSp(V, \psi)$ *ist, die alle* t_i *fixiert.*

Satz

Die Menge $\mathrm{Sh_K(G, X)(\mathbb{C})}$ *parametrisiert die Isomorphieklassen von Tupeln* $(W, h, (s_i)_i, \eta K)$, *wobei*

- (W, h) *eine HS vom Typ* $(-1, 0), (0, -1)$
- $\pm s_0$ *eine Polarisierung von* W
- $s_1, \dots, s_n$: $W^{\otimes n_i} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *lin. Abb.*
- ηK *ein* K*-Orbit von Isom.* $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} W(\mathbb{A}_f)$, *der* ψ *auf ein* $\mathbb{A}_f^\times$*-Vielfaches von* s_0, *und für* $i = 1, \dots, n$, t_i *auf* s_i *abbildet.*

Übersicht

- Sh.-Var. vom PEL-Typ $\subset$
- Sh.-Var. vom Hodge-Typ $\subset$
- Sh.-Var. vom abelschen Typ $\subset$
- Sh.-Var.