Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Seien $A, B \in M_n(K)$ trigonalisierbare Matrizen, und für jeden Eigenwert λ von A gelte $\dim V(\lambda, A)^{\text{all}} \leq 3$.

Zeige, dass A genau dann ähnlich zu B ist, wenn $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ gilt.

Aufgabe 2

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}).$$

Bestimme die additive Jordan-Zerlegung $A = A_s + A_n$, die multiplikative Jordan-Zerlegung $A = A_s \cdot A_u$ und Polynome $p, q \in \mathbb{C}[X]$, so dass $A_s = p(A)$ und $A_n = q(A)$.

Hinweis: Das charakteristische Polynom von A ist $(X-2)^3$.

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Bestimme die Iwasawa-Zerlegung von A in der Form $A = SDN$, wobei $S \in O(3, \mathbb{R})$, D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen und N eine unipotente obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 4

Sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Zeige, dass sich A unitär trigonalisieren läßt, d. h. es existiert ein $U \in U(n)$, so dass $U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 5

Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein euklidischer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ eine nicht notwendig lineare Abbildung, so dass $(f(v), f(w)) = (v, w)$ für alle $v, w \in V$. Zeige, dass f eine Isometrie ist.

Aufgabe 6

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei f ein Endomorphismus von V. Sei f^* die zu f adjungierte Abbildung. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) $f = 0$,

ii) $f^* \circ f = 0$,

iii) $\mathrm{Spur}(f^* \circ f) = 0$.

Aufgabe 7

Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $V = \mathbb{R}^{2n}$. Sei β die durch

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

gegebene symmetrische Bilinearform auf V. Berechne den Signaturtyp von (V, β).

Organisatorische Hinweise zur Klausur

- **Termin:** Samstag, 17. Juli 2004, 9 Uhr s.t., Dauer: 2 Stunden
- **Ort:** Wolfgang-Paul-Hörsaal, Zeichensaal (Wegelerstr. 10), Hörsaal I der Physik. Die Verteilung der Übungsgruppen auf die Hörsäle wird noch bekanntgegeben.
- **Anmeldung:** Bitte melden Sie sich bis zum 10. Juli im Internet für die Klausur an: http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/klausur.html Wenn Sie keinen Internetzugang haben, bitten Sie bitte einen Kommilitonen oder Ihren Übungsgruppenleiter, die Anmeldung für Sie durchzuführen. Für die Anmeldung benötigen Sie Ihre Matrikelnummer.
- Bitte bringen Sie Papier und einen geeigneten Stift (blau oder schwarz; **kein Bleistift**) mit. Andere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Bitte halten Sie bei der Klausur Ihren Studentenausweis bereit.