Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, Teil 9

Aufgabe 5

Berechne die additive und die multiplikative Jordanzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 6

Berechne den größten gemeinsamen Teiler h der Polynome f und g in $K[X]$ und bestimme Polynome a und b, so dass $af + bg = h$, wobei

a) $K = \mathbb{Q}$, $f(X) = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 9X^3 + 8X^2 - 7X + 6$, $g(X) = X^5 + X^4 - 5X^2 - 11X - 6$.

b) $K = \mathbb{F}_2$, $f(X) = X^4 + 1$, $g(X) = X^4 + X^3 + X + 1$.

Aufgabe 7

Sei K ein Körper, $g(X) \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom und $a \in K$ ein Element mit $g(a) \neq 0$. Zeige durch vollständige Induktion, dass es für jede natürliche Zahl n eindeutig bestimmte Polynome $p_n(X), q_n(X) \in K[X]$ gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} &p_n(X) \cdot (X - a)^n + q_n(X) \cdot g(X) = 1, \\ &\deg p_n < \deg g, \\ &\det q_n < n. \end{aligned}$$

Gib Rekursionsformeln an, mit denen man p_n und q_n aus p_{n-1} und q_{n-1} berechnen kann.