1 Prä-Varietäten

Inhalt

- Affine algebraische Mengen
- Affine algebraische Mengen als Räume mit Funktionen
- Prävarietäten
- Beispiele

Notationen

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir schreiben gelegentlich $k[\underline{T}]$ für $k[T_1, \dots, T_n]$, den Polynomring in n Unbestimmten über k. Sind $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ und $f \in k[\underline{T}]$, so schreiben wir $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Affine algebraische Mengen

(1.1) Einführung.

Das grundlegende Thema der algebraischen Geometrie ist das Studium von Systemen polynomialer Gleichungen (in mehreren Unbestimmten). Im Gegensatz zur linearen Algebra, in der lineare Gleichungssysteme betrachtet werden, lassen wir also zu, dass höhere Potenzen der Unbestimmten auftreten. Sind ein (algebraisch abgeschlossener) Körper k und Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ gegeben, so interessieren wir uns für "geometrische Eigenschaften" der Lösungsmenge (oder Nullstellenmenge)

$$V(f_1, \dots, f_m) = \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n;\ \forall i:\ f_i(t_1, \dots, t_n) = 0\} \subseteq k^n.$$

Beispiel 1.1. Sei $f = T_1^2 - T_2^2(T_2 - 1) \in k[T_1, T_2]$. Um eine geometrische Anschauung zu bekommen, zeigen wir in Abbildung **??** die Nullstellenmenge des Polynoms $T_1^2 - T_2^2(T_2 - 1) \in \mathbb{R}[T_1, T_2]$ in $\mathbb{R}^2$. Es ist allerdings zu beachten, dass dies nicht ein Beispiel für unsere Situation ist, weil $\mathbb{R}$ kein algebraisch abgeschlossener Körper ist, und dass die so gewonnene Anschauung trügerisch sein kann. Vergleiche Aufgabe **??**.

In der Abbildung sehen wir ein "ein-dimensionales" Objekt. Die Definition der Dimension im Kontext der algebraischen Geometrie werden wir in Kapitel **??** geben; das detaillierte Studium dieses Begriff ist der Inhalt von Kapitel **??**.

Eine weitere Beobachtung ist, dass die Nullstellenmenge "lokal" an allen Punkten außer dem Ursprung (0,0) im wesentlichen so aussieht wie die reelle Gerade. Im Ursprung ist die lokale Gestalt jedoch anders. Wir können dieses Verhalten auch so beschreiben, dass wir in allen Punkten außerhalb des Ursprungs eine eindeutig bestimmte Tangente an $V(f)$ finden können, nicht jedoch im Ursprung. Diesem Phänomen entspricht die

Unterscheidung von "glatten" und "singulären Punkten", die wir später in Kapitel **??** machen werden.

Der Satz über implizite Funktionen sagt, dass die Nullstellenmenge von f genau an den Punkten (x_1,x_2) diffeomorph ist zu $\mathbb{R}$, an denen die Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}\ \frac{\partial f}{\partial T_2}\right)$ Rang 1 hat. Die partiellen Ableitungen eines Polynoms lassen sich auch rein formal über beliebigen Grundkörpern definieren, so dass wir dieses Kriterium auch algebraisch formulieren können. Wir werden sehen (**??**), dass dieses Kriterium tatsächlich eine Möglichkeit ist zu beschreiben, welche Punkte "glatt" sind.

Der erste Schritt in Richtung Geometrie ist, auf den Nullstellenmengen $V(f_1,\dots,f_m)$ eine Topologie zu definieren. Wir betrachten hier den Fall eines beliebigen (algebraisch abgeschlossenen) Körpers, und erhalten nur eine sehr grobe Topologie, die zwar nützlich ist, aber nicht die wesentlichen geometrischen Eigenschaften dieser Lösungsmengen beschreibt. Die Aufgabe der nächsten Abschnitte wird sein, diese topologischen Räume mit zusätzlicher Struktur zu versehen.

Wir werden dabei sehen, dass in gewissem Sinne die analytischen Hilfsmittel, die in der Differentialgeometrie oder der komplexen Geometrie benutzt werden, in unserem Kontext durch Ergebnisse der kommutativen Algebra ersetzt werden. Den Zusammenhang zwischen Geometrie und (kommutativer) Algebra stellt der Hilbertsche Nullstellensatz 1.7 her.

(1.2) Die Zariski-Topologie.

Definition 1.2. *Sei $M \subseteq k[T_1,\dots,T_m]$ eine Teilmenge. Wir bezeichnen mit*

$$V(M) = \{(t_1,\dots,t_n) \in k^n;\ \forall f \in M : f(t_1,\dots,t_n) = 0\}$$

die gemeinsame Nullstellen- (oder Verschwindungs-)Menge der Elemente von M. Besteht M aus den Elementen f_i, $i \in I$, so schreiben wir oft auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i; i \in I\})$.

Ist $M \subseteq k[\underline{T}]$ eine Teilmenge und bezeichnet $\mathfrak{a}$ das von M erzeugte Ideal, so gilt offenbar $V(M) = V(\mathfrak{a})$. Der Hilbertsche Basissatz [] besagt, dass der Polynomring $k[\underline{T}]$ ein noetherscher Ring ist, d. h. dass alle Ideale endlich erzeugt sind. Jedes Erzeugenden-System M eines endlich erzeugten Ideals $\mathfrak{a}$ enthält ein endliches Erzeugenden-System. Folglich existieren zu jeder Teilmenge $M \subseteq k[\underline{T}]$ endlich viele Elemente $f_1,\dots,f_n \in M$, für die $V(M) = V(f_1,\dots,f_n)$ ist.

Eine weitere offensichtliche Eigenschaft ist, dass $V(-)$ inklusionsumkehrend ist: sind $M' \subseteq M \subseteq k[\underline{T}]$ Teilmengen, so gilt $V(M') \supseteq V(M)$.

Satz 1.3. *Die Mengen $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subseteq k[\underline{T}]$ ein Ideal, sind die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf k^n, der sogenannten* Zariski-Topologie.

Beweis. Wir zeigen

1. $\emptyset = V((1))$, $k^n = V(0)$.
2. Für jede Familie $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ von Idealen $\mathfrak{a}_i \subseteq k[\underline{T}]$ gilt

$$\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i).$$

3. Für Ideale $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subseteq k[\underline{T}]$ gilt
$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Das zeigt insbesondere, dass beliebige Durchschnitte von Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$ ebenso wie endliche Vereinigungen solcher Mengen wieder die Form $V(\mathfrak{a})$ haben; zusammen mit dem ersten Punkt sagt das gerade, dass die $V(\mathfrak{a})$ die abgeschlossenen Mengen einer Topologie sind.

Nun zum Beweis der obigen Behauptungen. Der erste Punkt ist klar. Weiterhin haben wir
$$\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = \{x \in k^n;\ \forall i \in I, f \in \mathfrak{a}_i : f(x) = 0\} = V(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i),$$
und der zweite Punkt folgt unmittelbar, da $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ gerade das von der Vereinigung aller $\mathfrak{a}_i$ erzeugte Ideal ist. Es bleibt noch der dritte Punkt zu beweisen. Es ist klar, dass $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ in $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ enthalten sind. Ist andererseits $x \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ und $x \notin V(\mathfrak{a})$, so existiert $f \in \mathfrak{a}$ mit $f(x) \neq 0$, und für alle $g \in \mathfrak{b}$ gilt wegen $fg \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, dass $f(x)g(x) = (fg)(x) = 0$, also $g(x) = 0$ und damit $x \in V(\mathfrak{b})$. □

Wir werden von nun an die Menge k^n stets als topologischen Raum mit der Zariski-Topologie auffassen und diesen Raum mit $\mathbb{A}^n(k)$ bezeichnen. Wir nennen diesen Raum den *affinen Raum der Dimension n (über k)*. Der Zusatz *der Dimension n* ist hier als feststehender Ausdruck zu verstehen; wir werden erst später einen Dimensionsbegriff einführen (und dann natürlich sehen, dass $\mathbb{A}^n(k)$ wirklich die Dimension n hat).

(1.3) Affine algebraische Mengen.

Definition 1.4. *Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^n(k)$ bezeichnen wir als* affine algebraische Mengen*.*

Die Zariski-Topologie hat den Vorteil, dass sie über beliebigen Grundkörpern zur Verfügung steht. Andererseits ist sie sehr grob. Aus Lemma 1.19 folgt allgemein, dass sie für $n > 0$ nicht Hausdorffsch ist. Die folgenden beiden Beispiele zeigen dies ebenfalls in den Fällen $n = 1,2$.

Beispiel 1.5. Da der Polynomring $k[T]$ in einer Unbestimmten ein Hauptidealring ist, ist die Topologie von $\mathbb{A}^1(k)$ besonders leicht zu verstehen. Die abgeschlossenen Mengen sind $\emptyset$, $\mathbb{A}^1(k)$ und die Mengen der Form $V(f)$, wobei $f \in k[T]$ ein nicht-konstantes Polynom ist. Dann ist $V(f)$ gerade die Menge der Nullstellen von f. Also sind die nicht-trivialen abgeschlossenen Mengen von $\mathbb{A}^1(k)$ genau die endlichen Teilmengen.

Beispiel 1.6. Den topologischen Raum $\mathbb{A}^2(k)$ zu beschreiben, ist schwieriger. Wir haben die folgende offensichtliche Liste von abgeschlossenen Teilmengen:
- $\emptyset$, $\mathbb{A}^2(k)$,
- Einpunktige Mengen $\{(x_1,x_2)\} = V(T_1 - x_1, T_2 - x_2) \subset \mathbb{A}^2(k)$,
- $V(f)$, $f \in k[T_1,T_2]$ ein irreduzibles Polynom.

Außerdem sind endliche Vereinigungen von Mengen aus der obigen Liste wieder abgeschlossen. Man kann zeigen, dass diese Liste vollständig ist, wenn man die Korrespondenz zwischen "irreduziblen" abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^2(k)$ und Primidealen in $k[T_1,T_2]$ benutzt, die wir in Bemerkung 1.20 herstellen werden, und verwendet, dass der Ring $k[T_1,T_2]$ Krull-Dimension 2 hat, siehe **??**.

(1.4) Der Hilbertsche Nullstellensatz.

Wie bereits oben erwähnt, wird der Zusammenhang zwischen affinen algebraischen Mengen und kommutativer Algebra durch den Hilbertschen Nullstellensatz (und seine Korollare) hergestellt. Diesen wollen wir nun formulieren.

Theorem 1.7. (Hilbertscher Nullstellensatz) *Seien K ein (nicht notwendig algebraisch abgeschlossener) Körper und A eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann ist A Jacobsonsch, d. h. für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ gilt*

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p} \\ \text{max. Ideal}}} \mathfrak{m}.$$

Ist $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so ist die Körpererweiterung $K \subseteq A/\mathfrak{m}$ endlich.

Wir gründen den Beweis des Theorems auf den Noetherschen Normalisierungssatz, den wir hier nur zitieren; für einen Beweis siehe []. Wir nennen einen Ringhomomorphismus $R \to R'$ *endlich*, wenn R' als R-Algebra von endlich vielen Elementen $a_1, \dots ,a_r$ erzeugt wird, und wenn jedes Element von R' Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in R ist. Diesen Begriff werden wir später noch genauer untersuchen (siehe Kapitel **??**); er wird dann — wie auch der Normalisierungssatz — eine geometrische Deutung erhalten. Wir bemerken hier nur (ohne Beweis), dass $R \to R'$ genau dann endlich ist, wenn R' als R-Modul endlich erzeugt ist. Diese Charakterisierung werden wir für den Beweis des Nullstellensatzes nicht brauchen.

Theorem 1.8. (Noether-Normalisierung) *Seien K ein Körper und A eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann existieren $n \geq 0$ und Elemente $t_1, \dots ,t_n$, so dass der Einsetzungshomomorphismus $K[T_1, \dots ,T_n] \to A$, $T_i \mapsto t_i$, injektiv und endlich ist.*

Lemma 1.9. *Seien R, R' Integritätsringe, und sei $R \to R'$ ein injektiver endlicher Ringhomomorphismus. Dann ist R genau dann ein Körper, wenn R' ein Körper ist.*

Beweis. Sei R' ein Körper, und sei $a \in R \setminus \{0\}$. Das Element $a^{-1} \in R'^{\times}$ erfüllt nach Voraussetzung eine Gleichung $(a^{-1})^n + \beta_{n-1}(a^{-1})^{n-1} + \cdots + \beta_0 = 0$, $\beta_i \in R$, folglich ist

$$a^{-1} = \beta_{n-1} + \beta_{n-2}a + \cdots + a^{n-1} \in R.$$

Die andere Implikation beweist man ähnlich. □

Der wesentliche Schritt in unserem Beweis des Nullstellensatz ist der Beweis des folgenden unscheinbaren Lemmas.

Lemma 1.10. *Seien K ein Körper, $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und $A \neq 0$ eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann existiert ein K-Algebra-Homomorphismus $A \to \overline{K}$.*

Beweis. Indem wir zum Quotienten nach einem maximalen Ideal übergehen, können wir annehmen, dass A ein Körper ist. Wir wenden nun den Noether-Normalisierungssatz an und erhalten einen injektiven endlichen Homomorphismus $K[T_1,\dots,T_n] \to A$ von K-Algebren. Nach Lemma 1.9 muss aber $n = 0$ sein, d. h. es liegt eine endliche Körpererweiterung $K \to A$ vor. Dann ist aber wohlbekannt, dass wir die Einbettung $K \subseteq \overline{K}$ tatsächlich zu einem K-Homomorphismus $A \to \overline{K}$ fortsetzen können: Indem wir schrittweise vorgehen, genügt es nämlich den Fall zu behandeln, dass $A = K[\alpha]$ von einem Element erzeugt wird, und wir können dann α auf eine beliebige Nullstelle des Minimalpolynoms $\mathrm{minpol}_K(\alpha)$ in $\overline{K}$ abbilden. □

Beweis des Theorems. Aus dem Lemma folgt sofort die zweite Aussage des Satzes: ist nämlich $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so ist $A/\mathfrak{m}$ wieder eine endlich erzeugte K-Algebra, das Lemma liefert also einen K-Homomorphismus $A/\mathfrak{m} \to \overline{K}$. Folglich sind alle Elemente von $A/\mathfrak{m}$ algebraisch über K.

Für den Beweis des ersten Teils stellen wir eine Vorüberlegung an: Sind A eine endlich erzeugte K-Algebra und $\varphi\colon A \to \overline{K}$ ein K-Algebren-Homomorphismus, so ist das Bild von φ als Unterring von $\overline{K}$ ein Integritätsring, der K enthält. Der Homomorphismus $K \to \operatorname{Im}\varphi$ ist dann injektiv und endlich, da alle Elemente von $\overline{K}$ algebraisch über K sind. Nach Lemma 1.9 ist $\operatorname{Im}\varphi$ ein Körper, und $\operatorname{Ker}\varphi$ ein maximales Ideal.

Nun beweisen wir, dass A Jacobsonsch ist. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Wir ersetzen A durch den Quotienten $A/\mathfrak{p}$, und müssen dann zeigen, dass in einer integren endlich erzeugten K-Algebra A der Durchschnitt aller maximalen Ideale das Nullideal ist. Angenommen, es gäbe $x \in \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\subset A\\ \text{maximal}}} \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Dann ist die Lokalisierung $A[x^{-1}]$ eine endlich erzeugte K-Algebra $\neq 0$, und aus dem Lemma erhalten wir einen Homomorphismus $A[x^{-1}] \to \overline{K}$. Der Kern der Verkettung $\varphi\colon A \to A[x^{-1}] \to \overline{K}$ ist nach der Vorüberlegung ein maximales Ideal, enthält aber nicht x, ein Widerspruch! □

Korollar 1.11.
(1) *Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra, $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann ist $A/\mathfrak{m} = k$.*
(2) *Sei $\mathfrak{m} \subset k[T_1,\dots,T_n]$ ein maximales Ideal. Dann existieren $x_1,\dots,x_n \in k$, so dass $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1,\dots,T_n - x_n)$.*
(3) *Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[T_1,\dots,T_n]$ ein Ideal. Dann ist*

$$\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}\subset k[\underline{T}]\\ \textit{Primideal}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m}\subset k[\underline{T}]\\ \textit{max. Ideal}}} \mathfrak{m}.$$

Beweis. **zu (1):** Ein algebraisch abgeschlossener Körper besitzt keine nicht-trivialen endlichen Erweiterungen. (Das Gleichheitszeichen ist hier so zu verstehen, dass die beiden k-Algebren nicht nur abstrakt isomorph sind, sondern dass der natürliche Homomorphismus $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist.)

zu (2): Seien $x_1,\dots,x_n$ die Bilder der Unbestimmten T_i unter dem Homomorphismus $k[T_1,\dots,T_n] \to k[\underline{T}]/\mathfrak{m} = k$. Dann ist klar, dass $\mathfrak{m}$ das Ideal $(T_1 - x_1,\dots,T_n - x_n)$ enthält, und da letzteres offenbar maximal ist, müssen beide übereinstimmen.

zu (3): Die erste Gleichheit gilt bekanntermaßen in beliebigen kommutativen Ringen. Die zweite Gleichheit folgt unmittelbar aus dem Theorem. □

(1.5) Die Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen.

Die nächste Frage, die wir untersuchen wollen, um die Mengen $V(\mathfrak{a})$ besser zu verstehen, ist, wann zwei Ideale die gleiche Teilmenge von $\mathbb{A}^n(k)$ beschreiben. Dass das durchaus passieren kann, ist klar: Weil $f^n(x) = 0$ nur dann gelten kann, wenn $f(x) = 0$, gilt für ein Ideal $\mathfrak{a}$ und sein Radikal

$$\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \{f \in k[\underline{T}];\ \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : f^n \in \mathfrak{a}\}$$

stets $V(\mathfrak{a}) = V(\mathrm{rad}(\mathfrak{a}))$.

Definition 1.12. *Ist $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine Teilmenge, so bezeichne*

$$I(Z) = \{f \in k[\underline{T}];\ \forall x \in Z : f(x) = 0\}$$

das Ideal aller Funktionen, die auf Z verschwinden.

Für uns ist die wichtigste Konsequenz des Hilbertschen Nullstellensatzes der erste Teil des folgenden Satzes.

Satz 1.13.
(1) *Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[\underline{T}]$ ein Ideal. Dann gilt*

$$I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}).$$

(2) *Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine Teilmenge und $\overline{Z}$ ihr Abschluss. Dann gilt*

$$V(I(Z)) = \overline{Z}.$$

Beweis. **zu (1):** Zu $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal $(T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) \subset k[\underline{T}]$, mit anderen Worten den Kern des Einsetzungshomomorphismus $k[\underline{T}] \to k$, $T_i \mapsto x_i$. Für $f \in k[\underline{T}]$, $x \in \mathbb{A}^n(k)$ gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $f \in \mathfrak{m}_x$, also

$$I(V(\mathfrak{a})) = \{\, f \in k[\underline{T}]\ ;\ f \in \mathfrak{m}_x \text{ für alle } x \in V(\mathfrak{a}) \,\} = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{m}_x.$$

Da $x \in V(\mathfrak{a})$ äquivalent ist zu $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_x$, folgt

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ max. Ideal} \\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$$

aus dem Hilbertschen Nullstellensatz.

zu (2): Dies ist eine einfache Folgerung, für die wir nicht den Hilbertschen Nullstellensatz benötigen. Einerseits ist nämlich offenbar $Z \subseteq V(I(Z))$, und $V(I(Z))$ ist abgeschlossen. Das beweist $V(I(Z)) \supseteq \overline{Z}$. Sei andererseits $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge, die Z enthält. Dann gilt $f(z) = 0$ für alle $z \in Z$, $f \in \mathfrak{a}$, folglich $\mathfrak{a} \subseteq I(Z)$, und es folgt $V(I(Z)) \subseteq V(\mathfrak{a})$. □

Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[\underline{T}]$ nennen wir *Radikalideal*, wenn $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ gilt. Eine offensichtlich äquivalente Bedingung ist, dass $k[\underline{T}]/\mathfrak{a}$ reduziert ist (also keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält). Jedes Primideal ist ein Radikalideal.

Aus dem Satz folgt dann unmittelbar:

Korollar 1.14. *Die Zuordnungen $Z \mapsto I(Z)$ und $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ definieren eine $1:1$-Korrespondenz*

$$\{\textit{abgeschlossene Teilmengen von } \mathbb{A}^n(k)\} \leftrightarrow \{\textit{Radikalideale } \mathfrak{a} \subseteq k[\underline{T}]\},$$

die sich einschränkt zu einer $1:1$-Korrespondenz

$$\{\textit{Punkte in } \mathbb{A}^n(k)\} \leftrightarrow \{\textit{maximale Ideale in } k[\underline{T}]\}.$$

Das maximale Ideal zu $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_x := I(\{x\})$. Es ist gleich dem Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$k[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow k, \quad T_i \mapsto x_i.$$

In den folgenden Abschnitten untersuchen wir weitere Eigenschaften der Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n(k)$ und auf affinen algebraischen Mengen. Dabei zeigt sich wieder, dass die hier auftretenden Räume ganz andere topologische Eigenschaften haben als Hausdorff-Räume, für die die unten eingeführten Begriffe des irreduziblen und des noetherschen topologischen Raumes uninteressant sind (vgl. Aufgabe 3).

(1.6) Irreduzible topologische Räume.

Definition 1.15. *Ein topologischer Raum X heißt* irreduzibel, *wenn $X \neq \emptyset$ und X sich nicht als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen darstellen lässt. Eine Teilmenge Z eines topologischen Raums heißt irreduzibel, wenn Z, versehen mit der induzierten Topologie, irreduzibel ist.*

Satz 1.16. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*
(i) *X ist irreduzibel.*
(ii) *Je zwei nicht-leere offene Teilmengen von X haben einen nicht-leeren Durchschnitt.*
(iii) *Jede nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist dicht in X.*
(iv) *Jede nicht-leere offene Teilmenge ist zusammenhängend.*
(v) *Jede nicht-leere offene Teilmenge ist irreduzibel.*

Beweis. Indem man zu Komplementärmengen übergeht, sieht man sofort die Äquivalenz von (i) und (ii). Eine Teilmenge von X ist genau dann dicht, wenn sie jede nicht leere offene Menge von X trifft. Also sind auch (ii) und (iii) äquivalent. Ferner wird (ii) offensichtlich von (iv) impliziert. Wir zeigen nun die umgekehrte Implikation. Sei U offen und unzusammenhängend. Dann gilt $U = U_1 \cup U_2$ wobei U_1 und U_2 disjunkte offene Teilmengen von U und damit von X sind. Dies steht im Widerspruch zu (ii).

Offensichtlich folgt (i) aus (v). Es gelte schließlich (iii). Wir wollen (v) zeigen. Sei $U \subseteq X$ offen und nicht-leer. Ist $V \subseteq U$ offen und nicht-leer in U, so ist V auch offen in X. Damit ist V dicht in X und erst recht dicht in U. Also ist U irreduzibel, da wir die Implikation von (iii) nach (i) bereits bewiesen haben. $\square$

Lemma 1.17. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss $\overline{Y}$ irreduzibel ist.*

Beweis. Eine Teilmenge Z von X ist nach Satz 1.16 (ii) genau dann irreduzibel, wenn für je zwei offene Teilmengen U und V von X mit $Z \cap U \neq \emptyset$ und $Z \cap V \neq \emptyset$ gilt, dass $Z \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Daraus folgt das Lemma, da eine offene Teilmenge genau dann Y trifft, wenn sie $\overline{Y}$ trifft. □

Definition 1.18. *Eine maximale irreduzible Teilmenge eines topologischen Raums X heißt* irreduzible Komponente von X*.*

Es folgt aus Lemma 1.17, dass jede irreduzible Komponente abgeschlossen ist.

Sei X ein topologischer Raum. Die Menge der irreduziblen Teilmengen von X ist induktiv geordnet, denn für jede aufsteigende Kette irreduzibler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel. Nach dem Lemma von Zorn ist folglich jede irreduzible Teilmenge in einer irreduziblen Komponente von X enthalten. Insbesondere ist jeder Punkt von X in einer irreduziblen Komponente enthalten, d. h. X ist die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.

(1.7) Irreduzible affine algebraische Mengen.

Eine affine algebraische Menge heißt *irreduzibel*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum irreduzibel ist.

Lemma 1.19. *Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge. Es ist Z irreduzibel genau dann, wenn $I(Z)$ ein Primideal ist. Insbesondere ist $\mathbb{A}^n(k)$ irreduzibel.*

Beweis. Die Teilmenge Z ist genau dann irreduzibel, wenn sie nicht Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen ist. Da sich jede abgeschlossene Teilmenge als Durchschnitt von Mengen der Form $V(f)$ schreiben lässt, ist dazu äquivalent, dass für je zwei Elemente $f,g \in k[T_1,\dots,T_n]$ mit $V(fg) = V(f) \cup V(g) \supseteq Z$ gilt: $V(f) \supseteq Z$ oder $V(g) \supseteq Z$. Das heißt aber genau, dass für je zwei Polynome f, g mit $fg \in I(Z)$ gilt: $f \in I(Z)$ oder $g \in I(Z)$, also dass $I(Z)$ ein Primideal ist. □

Bemerkung 1.20. Die Korrespondenz aus Korollar 1.14 schränkt sich also ein zu einer Bijektion

$$\{\text{irreduzible abgeschlossene Teilmengen in } \mathbb{A}^n(k)\} \leftrightarrow \{\text{Primideale in } k[T_1,\dots,T_n]\}.$$

(1.8) Quasikompakte und Noethersche topologische Räume.

Definition 1.21. *Ein topologischer Raum X heißt* quasi-kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

(Da die topologischen Räume, die hier auftreten, fast ausnahmslos nicht Hausdorffsch sind, hat sich in der algebraischen Geometrie der Begriff *quasi-kompakt* (statt *kompakt*) eingebürgert.)

Definition 1.22. *Ein topologischer Raum X heißt* noethersch*, wenn jede absteigende Kette*

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$$

abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird.

Lemma 1.23. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum.*
(1) *Jede abgeschlossene Teilmenge von X ist (bezüglich der Teilraumtopologie) noethersch.*
(2) *Jede offene Teilmenge von X ist quasi-kompakt.*
(3) *Sei $Z \subseteq X$ abgeschlossen. Dann besitzt Z nur endlich viele irreduzible Komponenten.*

Beweis. Der erste Punkt folgt sofort aus der Definition, und der zweite folgt dann aus dem ersten Punkt und der Bemerkung, dass nach Definition ein topologischer Raum genau dann noethersch ist, wenn jede aufsteigende Kette von offenen Teilmengen stationär wird.

Zum Beweis von (3) genügt es zu zeigen, dass jeder noethersche Raum X sich als Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen schreiben lässt. Die Eigenschaft, dass X noethersch ist, können wir so umformulieren, dass jede nichtleere Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X ein minimales Element besitzt. Wäre die Menge $\mathscr{M}$ aller derjenigen abgeschlossenen Teilmengen von X, die sich nicht als endliche Vereinigung von irreduziblen Mengen schreiben lassen, nichtleer, und $Z \in \mathscr{M}$ ein minimales Element, so wäre Z nicht irreduzibel, also Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen, die aber wegen der Minimalität nicht in $\mathscr{M}$ liegen. Dies führt zu einem Widerspruch. □

Satz 1.24. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen. Dann ist der topologische Raum X noethersch.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch ist. Wegen der inklusionsumkehrenden Bijektion zwischen abgeschlossenen Teilmengen von X und Idealen von $k[\underline{T}]$ (Korollar 1.14) folgt das aus dem Hilbertschen Basissatz, der besagt, dass jede endlich erzeugte Algebra über einem Körper ein noetherscher Ring ist, also auch $k[\underline{T}]$. □

Indem wir wieder die Korrespondenz zwischen abgeschlossenen Teilmengen und Idealen benutzen, erhalten wir aus der Zerlegung von X in seine irreduziblen Komponenten die Primärzerlegung in noetherschen Ringen [] für Radikalideale:

Korollar 1.25. *Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[T_1, \dots, T_n]$ ein Radikalideal, d. h. $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$. Dann lässt sich $\mathfrak{a}$ schreiben als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, die sich jeweils nicht enthalten, und diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

(1.9) Morphismen von affinen algebraischen Mengen.

Nachdem wir affine algebraische Mengen definiert haben, sagen wir nun, was wir unter einem Morphismus solcher Objekte verstehen wollen. Affine algebraische Mengen werden durch Polynome beschrieben (nämlich als Nullstellenmengen von Polynomen), und dementsprechend werden wir als Morphismen polynomiale Abbildungen betrachten, genauer:

Definition 1.26. *Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine algebraische Mengen. Ein* Morphismus $X \to Y$ von affinen algebraischen Mengen *ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ der zugrundeliegenden Mengen, so dass Polynome $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$ existieren, derart dass für alle $x \in X$ gilt*

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Anhand der Definition ist klar, dass sich ein Morphismus zwischen den affinen algebraischen Mengen $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ stets fortsetzen lässt zu einem Morphismus $\mathbb{A}^m(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ (aber nicht in eindeutiger Weise, es sei denn, es ist $X = \mathbb{A}^m(k)$).

Wir bezeichnen die Menge der Morphismen von X nach Y mit $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $Z \subseteq \mathbb{A}^r(k)$ affine algebraische Mengen, und seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Morphismen, gegeben durch Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[T_1, \ldots, T_m]$ und $g_1, \ldots, g_r \in k[T'_1, \ldots, T'_n]$. Dann gilt für $x \in X$:

$$g(f(x)) = (g_1(f_1(x), \ldots, f_n(x)), \ldots, g_r(f_1(x), \ldots, f_n(x))). \tag{1.9.1}$$

Also ist $g \circ f$ durch Polynome $h_i \in k[T_1, \ldots, T_m]$ $(i = 1, \ldots, r)$ gegeben, die man aus den g_i durch Ersetzen der Unbestimmten T'_j durch f_j für $j = 1, \ldots, n$ erhält. Insbesondere ist $g \circ f$ wieder ein Morphismus affiner algebraischer Mengen. Wir erhalten daher die Kategorie der affinen algebraischen Mengen.

(1.10) Beispiele für Morphismen affiner algebraischer Mengen.

Die Abbildung $\mathbb{A}^1(k) \to V(T_2 - T_1^2)$, $x \mapsto (x^2, x)$ ist ein Morphismus affiner algebraische Mengen, und sogar ein Isomorphismus, denn die Umkehrabbildung $(x,y) \mapsto y$ ist ebenso ein Morphismus.

Sei nun $\operatorname{char} k \neq 2$. Die Abbildung $\mathbb{A}^1(k) \to V(T_2^2 - (T_1^2(T_1+1))$, $x \mapsto (x^2-1, x(x^2-1))$ ist ein Morphismus, aber nicht bijektiv: 1 und -1 werden beide auf den Ursprung $(0,0)$ abgebildet. Siehe auch Aufgabe 8.

(1.11) Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen algebraischen Menge.

Die bisherige Begriffsbildung der affinen algebraischen Menge ist noch sehr unbefriedigend. Wir listen drei Probleme auf:

- Offene Teilmengen affiner algebraischer Mengen tragen nicht in natürlicher Weise die Struktur einer affinen algebraischen Menge.
- Insbesondere können wir affine algebraische Mengen nicht entlang offener Teilmengen verkleben (obwohl dies eine “natürliche Operation” für geometrische Objekte ist).
- Durchschnitte abgeschlossener affiner algebraischer Mengen in $\mathbb{A}^n(k)$ sind abgeschlossen und demzufolge wieder affine algebraische Mengen; wir können aber zum Beispiel nicht unterscheiden zwischen $V(X) \cap V(Y) \subset \mathbb{A}^2(k)$ und $V(Y) \cap V(X^2 - Y) \subset \mathbb{A}^2(k)$, obwohl sich die geometrische Situation “offensichtlich” unterscheidet. (Ähnliche Phänomene werden wir später zum Beispiel bei der Untersuchung von Fasern eines Morphismus kennenlernen.)

Die ersten beiden Probleme hängen damit zusammen, dass affine algebraische Mengen notwendigerweise in einen affinen Raum eingebettet sind. Diese Probleme werden wir in den folgenden Abschnitten lösen. Der dritte Punkt ist subtiler, und ist Teil der Motivation, in Kapitel **??** den Begriff des Schemas einzuführen.

Affine algebraische Mengen als Räume mit Funktionen

(1.12) Der affine Koordinatenring.

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen. Offenbar induziert jedes Polynom in $f \in k[T_1,\dots,T_n]$ einen Morphismus $X \to \mathbb{A}^1(k)$, $x \mapsto f(x)$, von affinen algebraischen Mengen. Die Menge $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1(k))$ ist in natürlicher Weise eine k-Algebra mit Addition und Multiplikation

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Den Elementen aus k ordnen wir die zugehörige konstante Funktion zu. Die Abbildung $k[\underline{T}] \to \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1(k))$ ist dann ein Homomorphismus von k-Algebren. Der Kern dieses Homomorphismus ist das Ideal $I(X)$.

Definition 1.27. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine algebraische Menge. Dann nennen wir*

$$\Gamma(X) := k[T_1,\dots,T_n]/I(X) \cong \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1(k))$$

den affinen Koordinatenring *von X.*

Zu $x = (x_1,\dots,x_n) \in X$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_x$ das Ideal

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in \Gamma(X);\ f(x) = 0\} \subset \Gamma(X).$$

Dieses Ideal ist das Bild des maximalen Ideals $(T_1 - x_1,\dots,T_n - x_n)$ von $\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) = k[\underline{T}]$ unter der Projektion $\pi\colon k[\underline{T}] \to \Gamma(X)$. Anders ausgedrückt, $\mathfrak{m}_x$ ist der Kern des Einsetzungshomomorphismus $\Gamma(X) \to k$, $f \mapsto f(x)$, und ist, da der Einsetzungshomomorphismus offenbar surjektiv ist, ein maximales Ideal. Also gilt $\Gamma(X)/\mathfrak{m}_x = k$.

Ist $\mathfrak{a} \subseteq \Gamma(X)$ ein Ideal, so sei

$$V(\mathfrak{a}) = \{x \in X;\ \forall f \in \mathfrak{a} : f(x) = 0\} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) \cap X.$$

Die $V(\mathfrak{a})$ sind dann genau die abgeschlossenen Teilmengen von X bezüglich der Topologie, die X als Teilraum von $\mathbb{A}^n(k)$ trägt. Diese Topologie bezeichnen wir wieder als Zariski-Topologie. Ist $f \in \Gamma(X)$, so setzen wir

$$D(f) = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\} = X \setminus V(f).$$

Lemma 1.28. *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(X)$, bilden eine Basis der Topologie (d. h. zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ existieren $f_i \in \Gamma(X)$, $i \in I$, mit $U = \bigcup_i D(f_i)$).*

Beweis. Schreibe $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$. Sind $f_1,\dots,f_n$ Erzeugende dieses Ideals, so folgt

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i),$$

also

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i).$$

Wir sehen insbesondere, dass wir sogar mit endlich vielen Elementen f_i auskommen. □

Satz 1.29. *Sei X eine affine algebraische Menge. Der affine Koordinatenring $\Gamma(X)$ ist eine endlich erzeugte k-Algebra, die reduziert ist (d. h. keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält). Ist X irreduzibel, so ist $\Gamma(X)$ sogar ein Integritätsbereich, und umgekehrt.*

Beweis. Da $\Gamma(X)$ ein Quotient eines Polynomrings in endlich vielen Unbestimmten ist, ist es eine endlich erzeugte k-Algebra. Dass $\Gamma(X)$ keine nichttrivialen nilpotenten Elemente hat, ist damit gleichbedeutend, dass $I(X) = \mathrm{rad}(I(X))$, was, wie wir oben gesehen haben, der Fall ist.

Nach Lemma 1.19 ist X genau dann irreduzibel, wenn $I(X)$ ein Primideal, also wenn $\Gamma(X)$ nullteilerfrei ist. □

(1.13) Funktorielle Eigenschaften des affinen Koordinatenrings.

Satz 1.30. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von affinen algebraischen Mengen. Die Vorschrift*

$$\Gamma(f)\colon \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1(k)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1(k)), \quad g \mapsto g \circ f$$

definiert einen Homomorphismus von k-Algebren. Wir erhalten so einen kontravarianten Funktor

$$\Gamma\colon (\textit{affine algebraische Mengen}) \longrightarrow (\textit{reduzierte endlich erzeugte } k\textit{-Algebren}).$$

Dieser Funktor liefert eine Äquivalenz von Kategorien. Durch Einschränkung erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\Gamma\colon (\textit{irreduzible affine algebraische Mengen}) \longrightarrow (\textit{integre endlich erzeugte } k\textit{-Algebren}).$$

Beweis. Ein $g \in \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1(k))$ ist nichts anderes als ein Morphismus $g\colon Y \to \mathbb{A}^1(k)$ von affinen algebraischen Mengen. Also ist die Verknüpfung $g \circ f\colon X \to \mathbb{A}^1(k)$ ein Morphismus, d. h. ein Element von $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1(k))$.

Wir sehen, dass die Vorschrift $g \mapsto g \circ f$ eine Abbildung $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ beschreibt. Die Beschreibung der Komposition in (1.9.1) zeigt unmittelbar, dass es sich um einen Homomorphismus von k-Algebren handelt, und dass $\Gamma(\mathrm{id_X}) = \mathrm{id}_{\Gamma(X)}$. Direkt aus der Definition folgt, dass $\Gamma(f_1 \circ f_2) = \Gamma(f_2) \circ \Gamma(f_1)$. Wir haben also insgesamt einen kontravarianten Funktor

$$\Gamma\colon (\text{affine algebraische Mengen}) \longrightarrow (\text{endlich erzeugte reduzierte } k\text{-Algebren})$$

definiert.

Wir zeigen als nächstes, dass dieser Funktor volltreu ist, d. h. für affine algebraische Mengen X, Y gilt:

$$\Gamma\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(Y),\Gamma(X)),\ f \mapsto \Gamma(f), \text{ ist bijektiv.}$$

Wir definieren dazu eine Umkehrabbildung. Sei etwa $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$. Ist $\varphi\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ gegeben, so können wir einen k-Algebra-Homomorphismus $\tilde{\varphi}$ finden, der in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[T_1',\dots,T_m'] & \xrightarrow{\tilde\varphi} & k[T_1,\dots,T_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(Y) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(X) \end{array}$$

passt. Wir definieren jetzt $f\colon X \to Y$ durch

$$x = (x_1,\dots,x_m) \mapsto (\tilde\varphi(T_1')(x_1,\dots,x_m),\dots,\tilde\varphi(T_n')(x_1,\dots,x_m))$$

und erhalten so die gewünschte Umkehrabbildung.

Schließlich müssen wir noch zeigen, dass der Funktor Γ essentiell surjektiv ist, dass also zu jeder reduzierten endlich erzeugten k-Algebra A eine affine algebraische Menge X mit $A \cong \Gamma(X)$ existiert. Das ist aber klar: nach Voraussetzung ist A der Quotient eines Polynomrings über k in endlich vielen Unbestimmten nach einem Radikalideal, etwa $A \cong k[T_1,\dots,T_m]/\mathfrak{a}$. Wir setzen dann einfach $X = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^m(k)$.

Dass sich diese Äquivalenz von Kategorien einschränkt zu einer Äquivalenz zwischen der Kategorie der irreduziblen affinen algebraischen Mengen und der Kategorie der integren endlich erzeugten k-Algebren, folgt sofort aus Satz 1.29. □

Wir halten noch die folgende Beschreibung von Morphismen affiner algebraischer Mengen fest.

Satz 1.31. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen, und sei $\Gamma(f)\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ der zugehörige Homomorphismus der affinen Koordinatenringe. Dann gilt für alle $x \in X$: $\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.*

Beweis. Das ist klar, denn für alle $g \in \Gamma(Y) = \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1(k))$ gilt $g(f(x)) = \Gamma(f)(g)(x)$. □

(1.14) Definition von Räumen mit Funktionen.

Wir definieren nun den Begriff eines *Raums mit Funktionen*. Das ist gewissermaßen ein Prototyp dessen, was wir als ein "geometrisches Objekt" auffassen wollen. Es handelt sich gleichzeitig um einen Spezialfall eines sogenannten geringten Raumes, auf dessen Definition sich in den nachfolgenden Kapiteln die Definition des Schemabegriffs gründen wird.

Definition 1.32. *Sei K ein Körper.*

(1) *Ein* Raum mit Funktionen über K *besteht aus den folgenden Daten:*

- *Ein topologischer Raum X.*
- *Eine Familie von Unter-K-Algebren $\mathscr{O}(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U,K)$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$, so dass gilt:*
  (a) *Sind $U' \subseteq U \subseteq X$ offen, und ist $f \in \mathscr{O}(U)$, so ist die Einschränkung $f|_{U'} \in \mathrm{Abb}(U',K)$ ein Element von $\mathscr{O}(U')$.*
  (b) *(Verklebungsaxiom) Sind $U_i \subseteq X$, $i \in I$ offen, ist $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, und sind $f_i \in \mathscr{O}(U_i)$, $i \in I$, gegeben mit*

$$f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j} \text{ für alle } i,j \in I,$$

dann liegt die eindeutig bestimmte Funktion $f : U \to K$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$, in $\mathscr{O}(U)$.

Die Familie $\mathscr{O}(U)$, $U \subseteq X$ offen, bezeichnen wir oft mit $\mathscr{O}$ oder $\mathscr{O}_X$; den durch X und $\mathscr{O}_X$ gegebenen Raum mit Funktionen bezeichnen wir mit $(X,\mathscr{O}_X)$ oder einfach mit X.

(2) *Ein* Morphismus $g\colon (X,\mathscr{O}_X) \to (Y,\mathscr{O}_Y)$ von Räumen mit Funktionen *ist eine stetige Abbildung $g\colon X \to Y$, so dass für alle $V \subseteq Y$ offen, $f \in \mathscr{O}_Y(V)$ gilt: $f \circ g|_{g^{-1}(V)}\colon g^{-1}(V) \to K$ liegt in $\mathscr{O}_X(g^{-1}(V))$.*

Es ist klar, dass die Räume mit Funktionen über K eine Kategorie bilden.

Definition 1.33. *Seien X ein Raum mit Funktionen, und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Wir bezeichnen mit $(U,\mathscr{O}_X|_U)$ den Raum mit Funktionen mit topologischem Raum U und Funktionen*

$$\mathscr{O}_X|_U(V) = \mathscr{O}_X(V) \text{ für } V \subseteq U \text{ offen.}$$

Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, betrachten wir im folgenden stets Räume mit Funktionen über unserem fest gewählten algebraisch abgeschlossenen Körper k.

(1.15) Der Raum mit Funktionen zu einer affinen algebraischen Menge.

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine irreduzible affine algebraische Menge. Wir versehen X mit der Zariski-Topologie und wollen zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ eine Menge von Funktionen $\mathscr{O}_X(U)$ definieren, so dass $(X,\mathscr{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen ist. Die Voraussetzung, dass X irreduzibel ist, ist nicht unbedingt nötig, erleichtert aber unsere Arbeit deutlich. In den späteren Kapiteln, in denen wir die Sprache der Schemata behandeln, wird diese Voraussetzung (neben mehreren anderen) wegfallen. Da X irreduzibel ist, können wir die Mengen $\mathscr{O}_X(U)$ alle als Teilmengen des sogenannten Funktionenkörpers von X realisieren, den wir als erstes definieren.

Definition 1.34. *Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge und $\Gamma(X)$ ihr affiner Koordinatenring. Dann heißt $K(X) := \operatorname{Quot}(\Gamma(X))$ der* Funktionenkörper *von X. (Die k-Algebra $\Gamma(X)$ besitzt keine Nullteiler, da X irreduzibel ist.)*

Wenn wir die Elemente von $\Gamma(X)$ als Morphismen $X \to \mathbb{A}^1(k)$ auffassen, dann können wir Elemente $\frac{f}{g}$ des Funktionenkörpers, $f,g \in \Gamma(X)$, $g \neq 0$, zwar nicht unbedingt als Funktion auf X auffassen, da der Nenner in der Regel Nullstellen haben wird, aber $\frac{f}{g}$ definiert zumindest eine Funktion von $D(g)$ nach k (und womöglich sogar auf einer noch größeren offenen Teilmenge von X, weil andere Darstellungen des Bruchs mit anderen Nennern existieren könnten). Abbildungen dieser Form wollen wir benutzen, um X zu einem Raum mit Funktionen zu machen.

Lemma 1.35. *Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge, und seien $\frac{f_1}{g_1}$ und $\frac{f_2}{g_2}$ Elemente von $K(X)$ ($f_1,f_2,g_1,g_2 \in \Gamma(X)$), so dass für eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq D(g_1g_2)$ gilt:*

$$\forall x \in U : \ \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Dann gilt $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ in $K(X)$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $g_1 = g_2 = g$. Dann gilt $(f_1 - f_2)(x) = 0$ für alle $x \in U$, die offene Teilmenge U liegt also in $V(f_1 - f_2)$. Da U dicht in X ist, folgt $f_1 - f_2 = 0$. □

Definition 1.36. *Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge, und sei $U \subseteq X$ offen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal zu $x \in X$ und mit $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ die Lokalisierung des affinen Koordinatenrings bezüglich dieses Ideals, und setzen*

$$\mathscr{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subset K(X).$$

Die Lokalisierung $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ können wir in dieser Situation als die Vereinigung

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x} \Gamma(X)_f \subset K(X)$$

beschreiben.

Um $(X,\mathscr{O}_X)$ als Raum mit Funktionen aufzufassen, müssen wir zunächst erklären, wie wir für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Elemente von $\mathscr{O}_X(U)$ mit Abbildungen $U \to k$ identifizieren. Sind $f \in \mathscr{O}_X(U)$ und $x \in U$ gegeben, so liegt f nach Definition in $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$, wir können also f in der Form $f = \frac{g}{h}$ mit $g,h \in \Gamma(X)$, $h \notin \mathfrak{m}_x$ schreiben. Dann ist aber $h(x) \neq 0$ und wir können $f(x) := \frac{g(x)}{h(x)} \in k$ setzen. Der Wert $f(x)$ ist wohldefiniert und aus Lemma 1.35 folgt, dass die so definierte Abbildung $\mathscr{O}_X(U) \to \mathrm{Abb}(U,k)$ injektiv ist.

Sind $V \subseteq U \subseteq X$ offene Teilmengen, so ist nach Definition $\mathscr{O}_X(U) \subseteq \mathscr{O}_X(V)$, und diese Inklusion entspricht vermöge der Identifikation mit Abbildungen $U \to k$ bzw. $V \to k$ der Einschränkung von Funktionen.

Um zu beweisen, dass $(X,\mathscr{O}_X)$ tatsächlich ein Raum mit Funktionen ist, müssen wir nun nur noch zeigen, dass wir Funktionen verkleben können. Das folgt aber direkt aus der Definition der $\mathscr{O}_X(U)$ als Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$. Wir bezeichnen den Raum mit Funktionen $(X,\mathscr{O}_X)$ als den *zur irreduziblen affinen algebraischen Menge X gehörigen Raum mit Funktionen.*

Wir wollen nun noch eine explizite Beschreibung der Mengen $\mathscr{O}_X(D(f))$ erarbeiten.

Satz 1.37. *Sei $(X,\mathscr{O}_X)$ der Raum mit Funktionen zur irreduziblen affinen algebraischen Menge X, und sei $f \in \Gamma(X)$. Dann gilt*

$$\mathscr{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f$$

(als Teilmengen von $K(X)$). Insbesondere gilt $\mathscr{O}_X(X) = \Gamma(X)$.

Beweis. Es ist klar, dass $\Gamma(X)_f \subseteq \mathscr{O}_X(D(f))$ gilt. Sei nun $g \in \mathscr{O}_X(D(f))$, und sei

$$\mathfrak{a} = \{h \in \Gamma(X);\ hg \in \Gamma(X)\}.$$

Offenbar ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\Gamma(X)$, und wir müssen zeigen, dass $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a}))$, also genügt es zu zeigen, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in V(\mathfrak{a})$. Ist aber $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, d. h. $x \in D(f)$, so existieren nach Voraussetzung $f_1,f_2 \in \Gamma(X)$, $f_2 \notin \mathfrak{m}_x$, mit $f = \frac{f_1}{f_2}$, also $f_2 \in \mathfrak{a}$, und wegen $f_2(x) \neq 0$ muss dann $x \notin V(\mathfrak{a})$ gelten. □

Bemerkung 1.38. Ist X eine irreduzible affine algebraische Menge, ist $U \subset X$ offen und ist $f \in \mathscr{O}_X(U)$, so existieren nicht notwendigerweise $g,h \in \Gamma(X)$ mit $f = \frac{g}{h} \in K(X)$ und $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Ein Beispiel für diese Situation werden wir sehen, nachdem wir etwas Dimensionstheorie gelernt haben (Kapitel **??**). Es ist aber leicht zu sehen, dass dieses Phänomen nicht auftreten kann, wenn der Ring $\Gamma(X)$ faktoriell ist, etwa für $X = \mathbb{A}^n(k)$.

Bemerkung 1.39. Der Satz zeigt, dass wir den Raum mit Funktionen zur irreduziblen affinen algebraischen Menge X auch auf anderem Wege hätten definieren können, nämlich durch die Festsetzung

$$\mathscr{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f \text{ für } f \in \Gamma(X).$$

Da die $D(f)$ für $f \in \Gamma(X)$ eine Basis der Topologie bilden, folgt aus dem Verklebungsaxiom, dass höchstens ein solcher Raum mit Funktionen existiert. Es wäre zu zeigen, dass es überhaupt einen solchen Raum mit Funktionen gibt (d. h. dass für $f,g \in \Gamma(X)$ mit $D(f) = D(g)$ auch $\Gamma(X)_f = \Gamma(X)_g$ gilt, und dass das Verkleben von Funktionen möglich ist). Diese Aufgabe entspricht mehr oder weniger dem Beweis von Satz 1.37. Der oben gewählte Ansatz ist in unserer Situation etwas bequemer. Der alternative Weg empfiehlt sich aber, wenn man auch Räume behandeln will, die nicht irreduzibel sind. Siehe Kapitel **??**.

Bemerkung 1.40. Ist A eine integre endlich erzeugte k-Algebra, so kann man den Raum mit Funktionen zu "der" zugehörigen irreduziblen affinen algebraischen Menge (die ja nach Satz 1.30 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist), auch direkt konstruieren, ohne Erzeuger von A als k-Algebra zu wählen. Wir erhalten nämlich die Menge X als die Menge der maximalen Ideale in A. Die abgeschlossenen Teilmengen von X sind die Mengen der Form

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m} \subset A \text{ maximal};\ \mathfrak{m} \supseteq a\}, \quad \mathfrak{a} \subseteq A \text{ ein Ideal}.$$

Für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ setzen wir schließlich

$$\mathscr{O}_X(U) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Quot}(A).$$

Dies definiert einen Raum mit Funktionen $(X,\mathscr{O}_X)$, der nach dem, was wir schon gezeigt haben, gerade der Raum mit Funktionen der zur A gehörigen irreduziblen affinen algebraischen Menge ist. Diese Sichtweise ist gewissermaßen der Ausgangspunkt für die Definition von Schemata, und wird insofern in den folgenden Kapiteln eine wichtige Rolle spielen.

(1.16) Funktorialität der Konstruktion.

Satz 1.41. *Seien X, Y irreduzible affine algebraische Mengen und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:*
(i) *Die Abbildung f ist ein Morphismus affiner algebraischer Mengen.*
(ii) *Für alle $g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \in \Gamma(X)$.*
(iii) *Für alle $U \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathscr{O}_Y(U)$ gilt $g \circ f \in \mathscr{O}_X(f^{-1}(U))$, d. h. f ist ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) haben wir bereits in Satz 1.30 bewiesen. Ferner ist klar, dass (ii) aus (iii) folgt. Um zu zeigen, dass auch die umgekehrte Implikation gilt, sei $\varphi\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ der Homomorphismus $h \mapsto h \circ f$. Da wir Funktionen auf offenen Teilmengen von Y durch Verkleben erhalten können, genügt es, die Behauptung für U von der Form $D(g)$, $g \in \Gamma(Y)$, zu zeigen. Dann gilt

$$f^{-1}(D(g)) = \{x \in X;\ g(f(x)) \neq 0\} = D(\varphi(g)).$$

Der Homomorphismus φ induziert einen Homomorphismus

$$\Gamma(Y)_g \longrightarrow \Gamma(X)_{\varphi(g)}$$

der Lokalisierungen. Nach der Definition von φ ist dies gerade die Abbildung

$$\mathscr{O}_Y(D(g)) \longrightarrow \mathscr{O}_X(D(\varphi(g))), \quad h \mapsto h \circ f.$$

□

Insgesamt erhalten wir

Theorem 1.42. *Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor*

$$(\textit{Irreduzible affine algebraische Mengen}) \longrightarrow (\textit{Räume mit Funktionen über } k).$$

Prävarietäten

Wir haben gesehen, dass wir jeder irreduziblen affinen algebraischen Menge einen Raum mit Funktionen zuordnen können, und dass wir dadurch "keine Information verlieren", d. h. diese Zuordnung definiert einen volltreuen Funktor. Andererseits entstehen auf diese Weise natürlich bei weitem nicht alle Räume von Funktionen. Wir wollen nun eine etwas größere Klasse von Objekten als die der affinen algebraischen Mengen einführen, indem wir es zulassen, solche — aufgefasst als Raum mit Funktionen — zu verkleben. Genauer machen wir die folgende Definition. Dabei nennen wir einen Raum mit Funktionen $(X,\mathscr{O}_X)$ *zusammenhängend*, wenn der topologische Raum X zusammenhängend ist.

(1.17) Definition von Prävarietäten.

Definition 1.43. *Eine affine Varietät ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph ist zu dem Raum mit Funktionen einer irreduziblen affinen algebraischen Menge.*

Definition 1.44. *Eine Prävarietät ist ein zusammenhängender Raum mit Funktionen $(X,\mathscr{O}_X)$, für den eine endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^N U_i$ existiert, derart dass für alle $i = 1,\dots,n$ der Raum mit Funktionen $(U_i,\mathscr{O}_X|_{U_i})$ eine affine Varietät ist.*

Ein Morphismus von Prävarietäten ist ein Morphismus der entsprechenden Räume mit Funktionen.

Insbesondere sind also affine Varietäten Beispiele für Prävarietäten. Warum wir hier von affinen Varietäten statt von affinen Prävarietäten sprechen, können wir zu diesem Zeitpunkt nicht vollständig erklären. Wir werden später Varietäten als “separierte Prävarietäten” definieren und sehen, dass affine Varietäten im obigen Sinne stets separiert sind (siehe Kapitel **??**).

Ist X eine affine Varietät, so schreiben wir oft $\Gamma(X)$ anstatt $\mathscr{O}_X(X)$. Wir haben ja gesehen, dass $\mathscr{O}_X(X)$ der affine Koordinatenring der zugehörigen irreduziblen affinen algebraischen Menge ist.

Unter einer *offenen affinen Überdeckung einer Prävarietät X* verstehen wir eine Familie von offenen Unterräumen mit Funktionen $U_i \subseteq X$, $i \in I$, die affine Varietäten sind, und so dass $X = \bigcup_i U_i$.

(1.18) Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mannigfaltigkeiten.

In der Differentialgeometrie (bzw. der komplexen Geometrie) definiert man den Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (bzw. einer komplexen Mannigfaltigkeit) in der Regel durch Kartenabbildungen mit differenzierbaren (bzw. holomorphen) Übergangsabbildungen. Das ist in unserer Situation problematisch, da wir offene Teilmengen affiner algebraischer Mengen nicht wieder als affine algebraische Mengen auffassen können. Andersherum ist es aber so, dass der hier gewählte Ansatz auch in der Differentialgeometrie (oder der komplexen Geometrie) genutzt werden könnte. Definieren wir etwa zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X das System $\mathscr{O}_X$ von $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen durch

$$\mathscr{O}_X(U) = C^\infty(U), \quad U \subseteq X \text{ offen},$$

so erhalten wir einen volltreuen Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der Räume von Funktionen über $\mathbb{R}$. Man kann daher differenzierbare Mannigfaltigkeiten auch als diejenigen Räume von Funktionen über $\mathbb{R}$ definieren, deren zugrundeliegende Raum Hausdorffsch ist, und die eine offene Überdeckungen durch solche Räume von Funktionen zulassen, die in der obigen Weise offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zugeordnet sind. Analog kann man für komplexe Mannigfaltigkeiten verfahren.

(1.19) Topologische Eigenschaften von Prävarietäten.

Lemma 1.45. *Seien X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \{Y \subseteq U \textit{ irreduzibel abgeschlossen}\} & \leftrightarrow & \{Z \subseteq X \textit{ irreduzibel abgeschlossen mit } Z \cap U \neq \emptyset\} \\ Y & \mapsto & \overline{Y} \quad \textit{(Abschluss in } X\textit{)} \\ Z \cap U & \leftarrow\!\shortmid & Z \end{array}$$

Beweis. Da ein Teilraum $Y \subseteq X$ genau dann irreduzibel ist, wenn der Abschluss $\overline{Y}$ irreduzibel ist (Lemma 1.17), sieht man unmittelbar, dass die angegebenen Abbildungen wohldefiniert und invers zueinander sind. $\square$

Satz 1.46. *Sei $(X,\mathscr{O}_X)$ eine Prävarietät. Dann ist der topologische Raum X noethersch (also insbesondere quasi-kompakt) und irreduzibel.*

Beweis. Sei $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ eine endliche offene affine Überdeckung. Ist

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots$$

eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen, so ist für alle i der Durchschnitt

$$U_i \supseteq U_i \cap Z_1 \supseteq U_i \cap Z_2 \supseteq \dots$$

eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen in U_i. Da die gewählte Überdeckung von X endlich ist, existiert $N_0 \geq 0$, so dass für alle $i = 1,\dots,n$ und alle $N \geq N_0$ gilt:

$$U_i \cap Z_N = U_i \cap Z_{N+1},$$

und es folgt, dass die Kette Z_j stationär wird. Also ist X ein noetherscher topologischer Raum.

Es bleibt noch zu zeigen, dass X irreduzibel ist. Jedenfalls können wir X in seine irreduziblen Komponenten (Definition 1.18)

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_n$$

zerlegen. Wir nehmen an, dass $n \geq 2$ wäre. Dann muss X_1 mindestens eine andere irreduzible Komponente schneiden. Sonst wären nämlich X_1 und $X \setminus X_1 = X_2 \cup \dots \cup X_n$ abgeschlossen in X und X wäre nicht zusammenhängend. Sei ohne Einschränkung $x \in X_1 \cap X_2$ und sei $U \subseteq X$ eine offene affine Umgebung von x. Da U irreduzibel ist, ist der Abschluss von U in X in einer irreduziblen Komponente von X enthalten. Nach dem Lemma sind aber $X_1 \cap U$ und $X_2 \cap U$ irreduzible Teilmengen von U, deren Abschluss in X gerade X_1 beziehungsweise X_2 ist. Widerspruch! □

(1.20) Offene Unterprävarietäten.

Wir erreichen nun eines der Ziele, das mit der Einführung der Räume mit Funktionen verbunden war: wir können offene Teilmengen von affinen Varietäten, und allgemeiner von beliebigen Prävarietäten, in natürlicher Weise wieder als Prävarietäten auffassen. Zu beachten ist, dass offene Unterprävarietäten von affinen Varietäten im allgemeinen nicht affin sind, siehe Aufgabe 9.

Lemma 1.47. *Sei X eine affine Varietät, sei $f \in \mathscr{O}_X(X)$ und sei $D(f) \subseteq X$ die zugehörige offene Teilmenge. Sei $\Gamma(X)_f$ die Lokalisierung von $\Gamma(X) = \mathscr{O}_X(X)$ in f, und sei $(Y,\mathscr{O}_Y)$ die zu dieser integren endlich erzeugten k-Algebra korrespondierende affine Varietät. Dann sind $(D(f),\mathscr{O}_X|_{D(f)})$ und $(Y,\mathscr{O}_Y)$ isomorphe Räume mit Funktionen. Inbesondere ist $(D(f),\mathscr{O}_X|_{D(f)})$ eine affine Varietät.*

Beweis. Sei $f \in \Gamma(X)$ gegeben. Wir wissen schon, dass $\mathscr{O}_X(D(f)) = \mathscr{O}_X(X)_f$ die Lokalisierung des affinen Koordinatenrings von X bezüglich des Elements f ist. Wenn $(D(f),\mathscr{O}_X|_{D(f)})$ eine affine Varietät ist, dann muss es also diejenige mit diesem affinen Koordinatenring sein.

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, und sei $\mathfrak{a} = I(X) \subseteq k[T_1,\dots,T_n]$ das korrespondierende Radikalideal. Wir fassen $k[T_1,\dots,T_n]$ als Unterring von $k[T_1,\dots,T_{n+1}]$ auf und bezeichnen mit $\mathfrak{a}' \subseteq k[T_1,\dots,T_{n+1}]$ das von $\mathfrak{a}$ und $fT_{n+1} - 1$ erzeugte Ideal. Dann ist

$$\Gamma(Y) = \Gamma(X)_f \cong k[T_1,\dots,T_{n+1}]/\mathfrak{a}',$$

wir können also Y identifizieren mit $V(\mathfrak{a}') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$.

Die Projektion $\mathbb{A}^{n+1}(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ auf die ersten n Koordinaten liefert durch Einschränkung einen Morphismus $Y \to X$, der offenbar eine Bijektion $j\colon Y \to D(f)$ induziert.

Wir zeigen, dass j ein Isomorphismus von Räumen mit Funktionen ist. Die Abbildung j ist als Einschränkung einer stetigen Abbildung wieder stetig, und j ist auch offen, denn für $\frac{g}{f^N} \in \Gamma(X)_f = \Gamma(Y)$ (mit $g \in \Gamma(X)$) ist $j(D(\frac{g}{f^N})) = j(D(gf)) = D(gf)$. Also ist j ein Homöomorphismus.

Es bleibt noch zu zeigen, dass für alle $g \in \Gamma(X)$ die von j induzierte Abbildung

$$\mathscr{O}_X(D(fg)) \longrightarrow \Gamma(Y)_g, \quad s \mapsto s \circ j,$$

ein Isomorphismus ist. Es ist aber

$$\mathscr{O}_X(D(fg)) = \Gamma(X)_{fg} = (\Gamma(X)_f)_g = \Gamma(Y)_g,$$

und diese Identifikation entspricht genau der Verknüpfung mit j. □

Satz 1.48. *Sei $(X,\mathscr{O}_X)$ eine Prävarietät, und sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann ist $(U,\mathscr{O}_X|_U)$ eine Prävarietät und die Inklusion $U \to X$ ist ein Morphismus von Prävarietäten.*

Beweis. Da X irreduzibel ist, ist U zusammenhängend (Satz 1.16). Nach dem vorhergehenden Lemma ist klar, dass U sich durch offene affine Teilmengen von X überdecken lässt. Weil X noethersch ist, ist U quasi-kompakt (Lemma 1.23), und wir kommen sogar mit einer endlichen Überdeckung aus. □

Die offenen affinen Teilmengen einer Prävarietät X (d. h. offene Teilmengen U von X, so dass $(U,\mathscr{O}_X|_U)$ eine affine Varietät ist), bilden eine Basis der Topologie von X, denn dies gilt nach dem Lemma für affine Varietäten X, und eine beliebige Prävarietät wird nach Definition durch offene affine Untervarietäten überdeckt.

(1.21) Funktionenkörper einer Prävarietät.

Lemma und Definition 1.49. *Sei X eine Prävarietät. Dann sind die rationalen Funktionenkörper aller nicht-leeren affinen offenen Teilmenge in natürlicher Weise zueinander isomorph. Diesen Körper nennen wir den* rationalen Funktionenkörper von X *und bezeichnen ihn mit $K(X)$.*

Beweis. Sind $U,V \subseteq X$ affine offene Untervarietäten, so ist $U \cap V$ offen in U und nicht leer, also gilt nach der Definition des Raums mit Funktionen zu einer affinen algebraischen Menge, dass $\mathscr{O}_X(U) \subseteq \mathscr{O}_X(U \cap V) \subseteq K(U)$, und folglich $\mathrm{Quot}(\mathscr{O}_X(U \cap V)) = K(U)$. Entsprechendes gilt für V, und es folgt $K(U) = K(V)$. □

Bemerkung 1.50. Da die Abbildung zwischen den affinen Koordinatenringen, die ein Morphismus affiner Varietäten induziert, in der Regel nicht injektiv ist, ist die Bildung des Funktionenkörpers $K(X)$ nicht funktoriell in X. Jeder Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ von Prävarietäten gibt aber Anlass zu einem Isomorphismus $K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$. Allgemeiner ist $K(X)$ offensichtlich funktoriell für Morphismen, deren Bild eine offene (automatisch dichte) Teilmenge enthält. Wir werden in (**??**) sehen, dass jeder Morphismus mit dichtem Bild diese Eigenschaft erfüllt. Solche Morphismen werden wir *dominant* nennen.

Satz 1.51. *Sei X eine Prävarietät und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann ist $\mathscr{O}_X(U)$ eine k-Unteralgebra des Funktionenkörpers $K(X)$. Ist $V \subseteq U$ eine weitere offene Teilmenge, so ist die Restriktionsabbildung $\mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V)$ die Inklusion von Teilmengen von $K(X)$. Insbesondere gilt für $U,V \subset X$ offen: $\mathscr{O}_X(U \cup V) = \mathscr{O}_X(U) \cap \mathscr{O}_X(V)$.*

Beweis. Ist $f\colon X \to k$ ein Element von $\mathscr{O}(X)$, so ist die Verschwindungsmenge $f^{-1}(0) \subseteq X$ von f eine abgeschlossene Teilmenge, weil für jede offene affine Teilmenge $W \subseteq X$ gilt, dass $f^{-1}(0) \cap U = V(f|_W)$. Deshalb sind für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U$ von X die Einschränkungsabbildungen $\mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V)$ injektiv. Da für affine Varietäten W stets $\mathscr{O}(W)$ eine Unteralgebra von $K(W)$ ist, folgt die entsprechende Aussage für beliebige Prävarietäten, und es ist klar, dass diese Einbettungen mit den Einschränkungsabbildungen verträglich sind. Die letzte Aussage folgt aus dem Verklebungsaxiom. □

(1.22) Abgeschlossene Unterprävarietäten.

Sei X eine Prävarietät, und sei $Z \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Wir wollen auf Z die Struktur einer Prävarietät definieren. Wie wir oben gesehen haben, tragen offene Teilmengen eines Raums mit Funktionen in offensichtlicher Weise wieder die Struktur eines Raums mit Funktionen; für abgeschlossene Teilmengen ist das nicht so klar (wenn auch im Fall affiner algebraischer Mengen gerade die abgeschlossene Teilmengen in natürlicher Weise wieder affine algebraische Mengen sind). Auch hier gibt es aber einen natürlichen Weg, auf Z ein System von Funktionen zu definieren. Wir setzen dazu für offene Teilmengen $U \subseteq Z$:

$$\mathscr{O}'_Z(U) = \{\, f \in \mathrm{Abb}(U,k) \;;\; \forall x \in U : \exists x \in V \subseteq X \text{ offen},\, g \in \mathscr{O}_X(V) : f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V} \,\}.$$

Aus den Definitionen folgt direkt, dass $(Z,\mathscr{O}'_Z)$ ein Raum mit Funktionen ist, und dass $\mathscr{O}'_X = \mathscr{O}_X$. Sobald wir das folgende Lemma bewiesen haben, werden wir stets $\mathscr{O}_Z$ (statt $\mathscr{O}'_Z$) für das so definierte System von Funktionen schreiben.

Lemma 1.52. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine irreduzible affine algebraische Menge, und sei $Z \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Dann stimmen der Raum mit Funktionen $(Z,\mathscr{O}_Z)$ zur affinen algebraischen Menge Z und der oben konstruierte Raum mit Funktionen $(Z,\mathscr{O}'_Z)$ überein.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass Z in beiden Fällen mit der Teilraumtopologie bezüglich der Inklusion $Z \subseteq X$ ausgestattet wird. Da die Inklusion $Z \to X$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen ist, induziert sie einen Morphismus $(Z,\mathscr{O}_Z) \to (X,\mathscr{O}_X)$, und es folgt aus der Definition von $\mathscr{O}'_Z$, dass $\mathscr{O}'_Z(U) \subseteq \mathscr{O}_Z(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq Z$.

Sei andererseits $f \in \mathscr{O}_Z(U)$. Zu $x \in U$ existiert dann $h \in \Gamma(Z)$ mit $x \in D(h) \subseteq U$, und die Einschränkung $f|_{D(h)} \in \mathscr{O}_Z(D(h)) = \Gamma(Z)_h$ hat die Form $f = \frac{g}{h^n}$, $n \geq 0$, $g \in \Gamma(Z)$. Wir liften g, h zu Elementen $\tilde{g}$,$\tilde{h} \in \Gamma(X)$, setzen $V := D(\tilde{h}) \subseteq X$ und erhalten $x \in V$, $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}^n} \in \mathscr{O}_X(D(\tilde{h}))$ und $f|_{U\cap V} = \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}^n}|_{U\cap V}$. □

Als Folgerung aus dem Lemma erhalten wir:

Satz 1.53. *Sei X eine Prävarietät, und sei $Z \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Sei $\mathscr{O}_Z$ das oben definierte System von Funktionen. Dann ist $(Z,\mathscr{O}_Z)$ eine Prävarietät.*

Beispiele

Als erstes Beispiel für eine nicht affine Prävarietät definieren wir nun den projektiven Raum.

(1.23) Homogene Polynome.

Definition 1.54. *Ein Polynom $f \in k[X_0,\dots,X_n]$ heißt* homogen vom Grad $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, *wenn f die Summe von Monomen vom Grad d ist.*

Da k unendlich viele Elemente hat, können wir homogene Polynome vom Grad d auch so charakterisieren, dass $f(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n) = \lambda^d f(x_0,\dots,x_n)$ für alle $x_0,\dots,x_n \in k$, $\lambda \in k^\times$ gelten soll. Gemäß beider Definitionen ist das Nullpolynom für jedes d homogen vom Grad d. Wir bezeichnen mit $k[X_0,\dots,X_n]_d$ den Untervektorraum aller homogenen Polynome vom Grad d. Es gilt

$$k[X_0,\dots,X_n] = \bigoplus_{d\geq 0} k[X_0,\dots,X_n]_d,$$

denn wir können jedes Polynom in eindeutiger Weise in seine homogenen Bestandteile zerlegen.

Lemma 1.55. *Seien $i \in \{0,\dots,n\}$ und $d \geq 0$. Wir haben eine bijektive k-lineare Abbildung*

$$\Phi_i\colon k[X_0,\dots,X_n]_d \xrightarrow{1:1} \textit{Polynome in } k[T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n] \textit{ vom Grad} \leq d.$$

(Elemente eines Tupels mit $\widehat{\cdot}$ sollen ausgelassen werden.)

Beweis. Zu $f \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ definieren wir

$$\Phi_i(f) := f(T_0,\dots,1,\dots,T_n) \in k[T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n].$$

Ist andererseits $g \in k[T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n]$ vom Grad $\deg g \leq d$ und ist $g = \sum_{j=0}^d g_j$ die Zerlegung in homogene Bestandteile (bezüglich der T_ℓ für $\ell = 0,\dots,n$, $\ell \neq i$), so sei $\Psi_i(g) = \sum_{j=0}^d X_i^{d-j} g_j(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_n)$. Es ist leicht zu sehen, dass die Abbildungen Φ_i und Ψ_i invers zueinander sind (da beide Abbildungen k-linear sind, genügt es, dies auf Monomen nachzuprüfen) und die gewünschte Bijektion induzieren. □

Die Abbildung Φ_i bezeichnet man als *Dehomogenisieren*, die Abbildung Ψ_i als *Homogenisieren* (jeweils *bezüglich* X_i). Oft ist es in diesem Zusammenhang nützlich, den Polynomring $k[T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n]$ mit dem Unterring $k[\frac{X_0}{X_i},\dots,\frac{X_n}{X_i}]$ von $\operatorname{Quot}(k[X_0,\dots,X_n])$ zu identifizieren.

(1.24) Definition des projektiven Raums.

Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$ der Dimension n ist eine Prävarietät, die eine außerordentlich wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie spielt, weil man sehr viele derjenigen Prävarietäten, die in der Praxis von Interesse sind, als Untervarietät in einen projektiven Raum einbetten kann. Eine konkrete Motivation für die Definition der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(k)$ ist, dass sie den "Defekt" der affinen Ebene behebt, dass es Geraden gibt, die sich nicht schneiden. Wie wir in (1.27) sehen werden, schneiden sich je zwei verschiedene Geraden in der projektiven Ebene in genau einem Punkt.

Als Menge setzen wir

$$\mathbb{P}^n(k) = \{\text{Ursprungsgeraden in } k^{n+1}\} = (k^{n+1} \setminus \{0\})/k^\times.$$

Dabei ist eine Ursprungsgerade per definitionem ein 1-dimensionaler k-Untervektorraum, und wir bezeichnen mit $(k^{n+1} \setminus \{0\})/k^\times$ die Menge der Äquivalenzklassen in $k^{n+1} \setminus \{0\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(x_0,\dots x_n) \sim (x'_0,\dots,x'_n) \iff \exists \lambda \in k^\times : \forall i : x_i = \lambda x'_i.$$

Die zweite Gleichheit ist dann klar: Wir ordnen der Äquivalenzklasse von $(x_0,\dots,x_n)$ die von diesem Vektor aufgespannte Ursprungsgerade zu. Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(x_0,\dots,x_n)$ bezeichnen wir mit $(x_0 : \dots : x_n)$. Wir nennen die x_i *homogene Koordinaten* auf $\mathbb{P}^n(k)$.

Für alles weitere ist die folgende Beobachtung entscheidend: Ist $0 \le i \le n$, so sei

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k);\ x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n(k).$$

Diese Teilmenge ist wohldefiniert, und die Vereinigung der U_i für $0 \le i \le n$ ist ganz $\mathbb{P}^n(k)$. Wir haben eine Bijektion von Mengen

$$U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k), \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{\widehat{x_i}}{x_i},\dots \frac{x_n}{x_i}).$$

Als nächstes definieren wir eine Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$, indem wir festsetzen, dass eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ genau dann offen ist, wenn für alle i der Durchschnitt $U \cap U_i$ offen ist bezüglich der durch die Bijektion $U_i \cong \mathbb{A}^n(k)$ auf U_i induzierten Topologie. Es ist klar, dass durch diese Vorschrift tatsächlich die Axiome einer Topologie erfüllt werden, denn für alle $i \neq j$ ist $U_i \cap U_j = D(T_j) \subseteq U_i$ offen. (Wir verwenden hier auf $U_i \cong \mathbb{A}^n(k)$ die Koordinaten $T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n$.) Durch diese Definition wird $(U_i)_{0 \le i \le n}$ zu einer offenen Überdeckung von $\mathbb{P}^n(k)$.

Um den projektiven Raum als Raum mit Funktionen zu definieren, müssen wir nun noch für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die Menge $\mathscr{O}(U)$ der regulären Funktionen auf U definieren. Sei also $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ offen. Wir setzen

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \{\, f \in \operatorname{Abb}(U,k)\ ;\ \forall i \in \{0,\dots,n\} : f|_{U \cap U_i} \in \mathscr{O}_{U_i}(U \cap U_i)\,\}.$$

Hier benutzen wir wieder die Bijektion $U_i \cong \mathbb{A}^n(k)$ und statten U_i vermöge dieser mit der Struktur eines Raums mit Funktionen aus. Es ist klar, dass dies die Struktur eines Raums mit Funktionen auf $\mathbb{P}^n(k)$ definiert. Der folgende Satz beschreibt die Mengen $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U)$ explizit.

Satz 1.56. *Sei $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ offen. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \{f\colon U \longrightarrow k \;;\; &\textit{für alle } x \in U \textit{ existieren } V \subseteq U \textit{ offen mit } x \in V \textit{ und}\\ &g,h \in k[X_0,\dots,X_n] \textit{ homogen vom selben Grad, so dass für alle } v \in V\textit{:}\\ &h(v) \neq 0,\ f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}\}.\end{aligned}$$

Beweis. Sei zunächst $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U)$. Da $f|_{U\cap U_i} \in \mathscr{O}_{U_i}(U \cap U_i)$, hat f lokal die Gestalt $\frac{\tilde g}{\tilde h}$ mit $\tilde g,\tilde h \in k[T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n]$. Homogenisieren bezüglich T_i und Multiplizieren mit einer geeigneten Potenz von T_i liefert dann die gewünschte Form.

Nun sei f in der Menge auf der rechten Seite. Wir fixieren $i \in \{0,\dots,n\}$. Lokal auf $U \cap U_i$ hat f nach Voraussetzung die Form $\frac{g}{h}$ für $g,h \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ und d geeignet. Wir setzen

$$\tilde g = \frac{g}{X_i^d}, \quad \tilde h = \frac{h}{X_i^d} \in k[\frac{X_0}{X_i},\dots,\widehat{\frac{X_i}{X_i}},\dots,\frac{X_n}{X_i}],$$

also hat f lokal die Form $\frac{\tilde g}{\tilde h}$ mit $\tilde g,\tilde h \in k[T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n]$. Daraus folgt $f|_{U\cap U_i} \in \mathscr{O}_{U_i}(U \cap U_i)$. □

Korollar 1.57. *Sei $i \in \{0,\dots,n\}$. Dann induziert die Bijektion $U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$ einen Isomorphismus*

$$(U_i,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}|_{U_i}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k).$$

von Räumen mit Funktionen. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n(k)$ eine Prävarietät.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq U_i$

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \{\, f\colon U \longrightarrow k \;;\; f \in \mathscr{O}_{U_i}(U)\,\},$$

dass wir also auf der rechten Seite die entsprechende Bedingung nur für das fixierte i nachprüfen müssen. Diese Tatsache folgt sofort aus dem Beweis des Satzes. □

Der Funktionenkörper $K(\mathbb{P}^n(k))$ (1.21) von $\mathbb{P}^n(k)$ ist nach Definition der Funktionenkörper $K(U_i) = k(\frac{X_0}{X_i},\dots,\frac{X_n}{X_i})$ von U_i. Für $0 \le i,j \le n$ identifizieren wir $K(U_i)$ und $K(U_j)$ beide mit $K(U_i \cap U_j)$. Aus der Beschreibung von $U_i \cap U_j$ als Teilmenge von U_i und U_j folgt, dass diese Identifikation gegeben ist durch

$$\begin{aligned}K(U_i) = k(\frac{X_0}{X_i},\dots,\frac{X_n}{X_i}) &\longrightarrow k(\frac{X_0}{X_j},\dots,\frac{X_n}{X_j}) = K(U_j),\\ \frac{X_\ell}{X_i} &\longmapsto \frac{X_\ell}{X_i}\frac{X_i}{X_j} = \frac{X_\ell}{X_j}.\end{aligned}$$

Wir zeigen damit den folgenden Satz:

Satz 1.58. *Es gilt*

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k.$$

Insbesondere ist $\mathbb{P}^n(k)$ für $n \geq 1$ keine affine Varietät.

Beweis. Es ist klar, dass die konstanten Funktionen in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k))$ enthalten sind. Nach Satz 1.51 gilt ferner $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = \bigcap_{0 \leq i \leq n} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U_i)$, wobei wir den Schnitt in $K(\mathbb{P}^n(k))$ bilden. Aus der Identifikation der Funktionenkörper der $K(U_i)$ miteinander folgt dann die Behauptung. □

(1.25) Projektive Varietäten.

Definition 1.59. *Abgeschlossene Unterprävarietäten eines projektiven Raums $\mathbb{P}^n(k)$ heißen* projektive Varietäten.

Sind $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ und $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein Polynom, so hängt der Wert $f(x_0, \dots, x_n)$ offensichtlich von der Wahl des Repräsentanten ab, und wir können f nicht als Funktion auf $\mathbb{P}^n(k)$ auffassen. Ist f aber homogen, so ist zumindest die Frage, ob der Wert $= 0$ oder $\neq 0$ ist, unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Wir definieren daher für homogene Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ (die nicht notwendig denselben Grad haben müssen) die Verschwindungsmenge

$$V_+(f_1, \dots, f_m) = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k);\ \forall j : f_j(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Teilmengen der Form $V_+(f_1, \dots, f_m)$ sind abgeschlossen. Genauer gilt nämlich für alle $i = 0, \dots, n$:

$$V_+(f_1, \dots, f_m) \cap U_i = V(\Phi_i(f_1), \dots, \Phi_i(f_m)),$$

wobei Φ_i wie gehabt das Dehomogenisieren bezüglich X_i bezeichnet.

Ist die Teilmenge $V_+(f_1, \dots, f_m)$ irreduzibel, so definiert sie also eine abgeschlossene Unterprävarietät in $\mathbb{P}^n(k)$. Bevor wir uns konkretere Beispiele anschauen, zeigen wir, dass alle projektiven Varietäten diese Form haben:

Satz 1.60. *Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine abgeschlossene Unterprävarietät. Dann existieren homogene Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$, so dass $Z = V_+(f_1, \dots, f_m)$ gilt.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n).$$

Da für alle i die Einschränkung $f|_{f^{-1}(U_i)} \colon f^{-1}(U_i) \to U_i$ ein Morphismus von Prävarietäten ist, gilt dies auch für f. Sei nun $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen und nicht-leer, sei $Y := f^{-1}(Z) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$, und sei $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$ der Abschluss von Y in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.

Sei $\mathfrak{a} = I(\overline{Y}) \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ das zu $\overline{Y}$ gehörige Ideal. Wir beweisen zunächst, dass $\mathfrak{a}$ von homogenen Polynomen erzeugt wird. Sei dazu $g \in \mathfrak{a}$ und sei $g = \sum_d g_d$ die Zerlegung in homogene Bestandteile (d. h. es sei g_d homogen vom Grad d). Wir müssen dann zeigen, dass mit g auch alle g_d in $\mathfrak{a}$ liegen. Es ist $\overline{Y}$ eine Vereinigung von Ursprungsgeraden in k^{n+1}, also gilt für alle $\lambda \in k^\times$:

$$g(x_0, \dots, x_n) = 0 \Longleftrightarrow g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0.$$

Wenn nicht alle g_d in $\mathfrak{a}$ liegen, dann gibt es $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{A}^{n+1}(k)$, so dass $g(x_0,\dots,x_n) = 0$, aber $g_d(x_0,\dots,x_n)\neq 0$ für mindestens ein d. Dann ist $\sum_d g_d(x_0,\dots,x_n)T^d\in k[T]$ nicht das Nullpolynom, und wir finden ein $\lambda\in k^\times$ mit

$$0\neq\sum_d g_d(x_0,\dots,x_n)\lambda^d=\sum_d g_d(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)=g(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)=0,$$

ein Widerspruch! Wir wissen nun, dass das Ideal $\mathfrak{a}$ von homogenen Polynomen erzeugt wird. Natürlich genügen endlich viele, etwa $f_1,\dots,f_m$. Es ist dann offensichtlich, dass $Z=V_+(f_1,\dots,f_m)$ ist. □

(1.26) Koordinatenwechsel im projektiven Raum.

Sei $A=(a_{ij})_{i,j=0,\dots,n}\in GL_{n+1}(k)$ eine invertierbare $(n+1)\times(n+1)$-Matrix. Die durch A beschriebene Abbildung $k^{n+1}\to k^{n+1}$ bildet Ursprungsgeraden auf Ursprungsgeraden ab und induziert eine Abbildung $\mathbb{P}^n(k)\to\mathbb{P}^n(k)$. Konkret ist diese Abbildung durch die Vorschrift

$$(x_0:\dots:x_n)\mapsto(\sum_{i=0}^n a_{0i}x_i:\dots:\sum_{i=0}^n a_{ni}x_i)$$

gegeben, und man überzeugt sich leicht, dass es sich hier um einen Morphismus von Prävarietäten handelt, den wir für den Moment mit φ_A bezeichnen wollen. Für $A,B\in GL_{n+1}(k)$ gilt $\varphi_{AB}=\varphi_A\varphi_B$. Insbesondere ist φ_A ein Isomorphismus; man nennt ihn den durch A beschriebenen Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$.

Bezeichne $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$ die Gruppe der Automorphismen der Prävarietät $\mathbb{P}^n(k)$. Die Zuordnung $A\mapsto\varphi_A$ definiert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon GL_{n+1}(k)\to\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$, dessen Kern gerade aus der Untergruppe $Z:=\{\lambda E_{n+1};\ \lambda\in k^\times\}$ der Skalarmatrizen besteht. Wir werden in **??** sehen, dass φ surjektiv ist und somit einen Isomorphismus $PGL_{n+1}(k)\to\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$ liefert. Hier bezeichnet $PGL_{n+1}(k)$ den Quotienten $GL_{n+1}(k)/Z$, die sogenannte projektive lineare Gruppe.

(1.27) Lineare Unterräume des projektiven Raums.

Sei $\varphi\colon k^{m+1}\to k^{n+1}$ ein injektiver Homomorphismus von k-Vektorräumen. Dieser bildet Ursprungsgeraden in k^{m+1} auf Ursprungsgeraden in k^{n+1} ab, und wir bekommen eine injektive Abbildung $\iota\colon\mathbb{P}^m(k)\to\mathbb{P}^n(k)$. Wie im Fall des Koordinatenwechsels ist klar, dass es sich hierbei um einen Morphismus von Prävarietäten handelt. In der Tat induziert dieser Morphismus einen Isomorphismus von $\mathbb{P}^m(k)$ mit einer abgeschlossenen Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$: Ist nämlich $A=(a_{ij})\in\mathrm{Mat}_{\ell\times(n+1)}(k)$ so beschaffen, dass $\ker A=\operatorname{im}\varphi$, und ist $f_i=\sum_{j=0}^n a_{ij}X_j\in k[X_0,\dots,X_n]$, so identifiziert ι den projektiven Raum $\mathbb{P}^m(k)$ mit $V_+(f_1,\dots,f_\ell)$.

Abgeschlossene Untervarietäten dieser Form bezeichnen wir als *lineare Unterräume*. Ist $m=1$, so sprechen wir auch von *Geraden*, ist $m=2$, so von *Ebenen*, ist $m=n-1$, so von *Hyperebenen* in $\mathbb{P}^n(k)$. Allgemein nennen wir m die *Dimension des linearen Unterraums*. Die linearen Unterräume der Dimension 0 sind gerade die Punkte des $\mathbb{P}^n(k)$.

Zu zwei Punkten $p\neq q\in\mathbb{P}^n(k)$ existiert genau eine Gerade in $\mathbb{P}^n(k)$, die p und q enthält. Das ist deswegen klar, weil zu zwei verschiedenen Ursprungsgeraden in k^{n+1} genau eine Ebene existiert, die beide Geraden enthält. Wir bezeichnen diese Gerade mit $\overline{pq}$.

Wir sehen nun auch, dass sich zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$ in genau einem Punkt schneiden. Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$ entsprechen nämlich Ebenen in k^3, und je zwei verschiedene Ebenen in k^3 schneiden sich in einer Gerade—diese wiederum entspricht einem Punkt in $\mathbb{P}^2(k)$. Ähnliche Aussagen lassen sich für Durchschnitte linearer Unterräume in höherdimensionalen projektiven Räumen treffen.

Eine weitreichende Verallgemeinerung für abgeschlossene Untervarietäten, die durch ein homogenes Polynom gegeben sind, dessen Grad nicht notwendigerweise gleich 1 ist, ist der Satz von Bézout (siehe **??**).

(1.28) Kegel.

Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine Hyperebene, und sei $p \in \mathbb{P}^n(k) \setminus H$. Sei ferner $X \subseteq H$ eine abgeschlossene Untervarietät. Wir definieren den Kegel $\overline{X,p}$ von X über p durch

$$\overline{X,p} = \bigcup_{q \in X} \overline{qp}.$$

Dies ist eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$: Nach einem Koordinatenwechsel dürfen wir nämlich ohne Einschränkung annehmen, dass $H = V_+(X_n)$ und $p = (0 : \dots : 0 : 1)$ ist. Ist dann $X = V_+(f_1, \dots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k) = H$, $f_i \in k[X_0, \dots, X_{n-1}]$, und ist $\tilde{f}_i$ das Polynom f_i, aufgefasst als Element von $k[X_0, \dots, X_n]$, so ist $\overline{X,p} = V_+(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)$.

Wir verallgemeinern diese Konstruktion noch wie folgt: Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ein linearer Unterraum, $\Lambda \cong \mathbb{P}^m(k)$, und sei $\Psi \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ein komplementärer linearer Unterraum, d. h. es gelte $\Lambda \cap \Psi = \emptyset$, und dass der kleinste lineare Unterraum von $\mathbb{P}^n(k)$, der Λ und Ψ enthält, $\mathbb{P}^n(k)$ ist.

Sei $X \subseteq \Psi$ eine abgeschlossene Untervarietät. Wir definieren den Kegel $\overline{X,\Lambda}$ von X über Λ durch

$$\overline{X,\Lambda} = \bigcup_{q \in X} \overline{q,\Lambda},$$

wobei $\overline{q,\Lambda}$ den von q und Λ aufgespannten linearen Unterraum bezeichnet (d. h. $\overline{q,\Lambda}$ ist der kleinste lineare Unterraum, der q und Λ enthält). In ähnlicher Weise wie für die erste Kegelkonstruktion zeigt man, dass $\overline{X,\Lambda}$ eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$ ist.

(1.29) Quadriken.

In diesem Abschnitt gelte $\operatorname{char} k \neq 2$.

Definition 1.61. *Eine* Quadrik *ist eine abgeschlossene Untervarietät $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ der Form $V_+(q)$, wobei $q \in k[X_0, \dots, X_n]_2 \setminus \{0\}$ ein nicht-verschwindendes homogenes Polynom vom Grad 2 ist.*

Sei $Q = V_+(q)$ eine Quadrik und sei β die zur quadratischen Form q gehörige Bilinearform auf k^{n+1}, das heißt

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w)), \quad v,w \in k^{n+1}.$$

Der Satz über die Hauptachsentransformation aus der linearen Algebra sagt, dass eine Basis von k^{n+1} existiert, so dass die Strukturmatrix von β bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix mit 1 und 0 auf der Diagonale ist. Ordnen wir die Basisvektoren so, dass auf der Diagonale zuerst die Einträge = 1 stehen, dann liefert der Koordinatenwechsel zu der Basiswechselmatrix einen Isomorphismus $Q \xrightarrow{\cong} V_+(X_0^2 + \cdots + X_{r-1}^2)$. Hier ist $r \geq 1$ die Anzahl der 1'en, mit anderen Worten der Rang der Matrix zu β; insbesondere ist diese Zahl unabhängig von der Wahl der Basis.

Lemma 1.62. *Das Polynom $X_0^2 + \cdots + X_{r-1}^2$ ist genau dann irreduzibel, wenn $r > 2$. Die Menge $V_+(X_0^2 + \cdots + X_{r-1}^2)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $r \neq 2$.*

Beweis. Da k algebraisch abgeschlossen ist, haben wir

$$X_0^2 + X_1^2 = (X_0 + \sqrt{-1}X_1)(X_0 - \sqrt{-1}X_1),$$

wobei $\sqrt{-1} \in k$ ein Element mit Quadrat -1 bezeichnet. Die anderen Fälle sind ähnlich einfach. □

Den folgenden Satz zitieren wir hier ohne Beweis. Mit einigem Aufwand könnten wir zwar den Beweis zum jetzigen Zeitpunkt führen, aber später (**??**) wird er sich mühelos aus der dann entwickelten Theorie ergeben, und wir nutzen den Satz als Motivation, dass sich der weitere Ausbau des theoretischen Apparats lohnt.

Satz 1.63. *Ist $r \neq s$, so gilt*

$$V(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2) \ncong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{s-1}^2).$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass es jedenfalls keinen Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$ geben kann, der $V(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$ mit $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{s-1}^2)$ identifiziert. Wie schon erwähnt, werden wir später sehen, dass alle Automorphismen von $\mathbb{P}^n(k)$ Koordinatenwechsel sind.

Definition 1.64. *Sei $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine Quadrik, und sei $r \geq 1$ die (nach dem Satz eindeutig bestimmte) ganze Zahl, so dass $Q \cong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$. Dann sagen wir, Q habe die* Dimension $n - 1$ *und den* Rang r.

Korollar 1.65. *Seien Q_1 und Q_2 Quadriken (die nicht notwendig im selben projektiven Raum eingebettet sein müssen). Dann sind Q_1 und Q_2 genau dann als Prävarietäten isomorph, wenn sie dieselbe Dimension und denselben Rang haben.*

Beweis. Sei eine Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^n(k)$ gegeben. Wir berechnen den rationalen Funktionenkörper $K(Q)$. Dazu können wir annehmen, dass $Q = V_+(X_0^2 + \cdots + X_r^2)$. Ist $r = 0$, so ist $Q \cong \mathbb{P}^{n-1}(k)$, also $K(Q) \cong k(T_1, \ldots, T_{n-1})$. Ist $r > 1$, so ist

$$U = V(1 + T_1^2 + \cdots + T_r^2) \subset \mathbb{A}^n(k)$$

eine nichtleere offene affine Teilmenge von Q, und es gilt

$$K(Q) = K(U) = \mathrm{Quot}(\Gamma(U)) = \mathrm{Quot}(k[T_1, \ldots, T_n]/(1 + T_1^2 + \cdots + T_r^2)).$$

In beiden Fällen hat $K(Q)$ den Transzendenzgrad $n-1$ über k. Zwei Quadriken $Q \subset \mathbb{P}^n(k)$ und $Q' \subset \mathbb{P}^{n'}(k)$, $n \neq n'$, können also nicht isomorph sein (vergleiche Bemerkung 1.50). Angesichts des obigen Satzes folgt daraus die Behauptung. □

Beispiel 1.66.
(1) in $\mathbb{P}^1(k)$: Die Quadrik vom Rang 2 besteht aus zwei Punkten; sie ist insbesondere nicht irreduzibel. Die Quadrik vom Rang 1 ist ein einziger Punkt.
(2) in $\mathbb{P}^2(k)$: Die Quadriken vom Rang 3 wird in Abbildung **??** gezeigt (wir zeigen hier wie üblich die "$\mathbb{R}$-wertigen Punkte", d. h. die Lösungen der entsprechenden Gleichung über $\mathbb{R}$—und weisen noch einmal darauf hin, dass diese Abbildungen daher nur bedingt geeignet sind, die entsprechenden Objekte zu veranschaulichen). Die Quadrik vom Rang 2 ist die Vereinigung zweier verschiedener Geraden (die sich also in einem Punkt schneiden), und ist insbesondere nicht irreduzibel. Die Quadrik vom Rang 1 ist eine Gerade.
(3) in $\mathbb{P}^3(k)$: Die Quadriken vom Rang 4, 3 bzw. 2 sind in Abbildung **??** abgebildet. Wiederum ist die Quadrik vom Rang 2 nicht irreduzibel. Die Quadrik vom Rang 1 ist eine Ebene (d. h. ein 2-dimensionaler linearer Unterraum).

Die Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^n(k)$ heißt *glatt*, falls $r = n+1$, also falls die Matrix zu q maximalen Rang hat. Wir sehen dann: Ist Q eine Quadrik vom Rang $r > 3$ und Dimension d, so ist Q ein Kegel $\overline{\tilde{Q},\Lambda}$ über einer glatten Quadrik $\tilde{Q}$ von Dimension $r-2$ bezüglich eines $d-r+2$-dimensionalen Unterraums Λ.

Die Fälle $r = 1$ und $r = 2$ sind "ausgeartet": Im Fall $r = 1$ ist $Q \cong V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$ eine Hyperebene in $\mathbb{P}^n(k)$. Die Zusatzinformation, dass Q durch ein quadratisches Polynom definiert wird, ist für die Varietät Q nicht sichtbar. In der Theorie der Schemata ist es allerdings möglich, diesen Unterschied festzumachen. Ist $r = 2$, so ist $Q \cong V_+(X_0^2+X_1^2)$ nicht irreduzibel, ist also keine Prävarietät in unserem Sinne. Auch diese Einschränkung werden wir im Rahmen der Schematheorie fallen lassen können.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. (Hilbertscher Basissatz) Sei A ein noetherscher Ring. Zeige, dass dann auch der Polynomring $A[T]$ noethersch ist. *Hinweis:* Betrachte zu einem Ideal $\mathfrak{b} \subseteq A[T]$ die Kette von Idealen $\mathfrak{a}_i \subseteq A$, wo $\mathfrak{a}_i$ das von den Leitkoeffizienten aller Polynome in $\mathfrak{b}$ vom Grad $\leq i$ erzeugte Ideal ist.

Aufgabe 2. Zeige ohne Verwendung des Hilbertschen Nullstellensatzes, dass $I(\mathbb{A}^n(k)) = 0$.

Aufgabe 3$\diamondsuit$. Bestimme alle irreduziblen Hausdorff-Räume. Bestimme alle noetherschen Hausdorff-Räume. Zeige, dass ein topologischer Raum genau dann noethersch ist, wenn jede offene Teilmenge quasikompakt ist.

Aufgabe 4$\diamondsuit$. Zeige, dass der zugrundeliegende topologische Raum X einer Prävarietät ein T1-Raum ist (d.h. für alle $x,y \in X$ existieren offene Umgebungen U von x und V von y mit $y \notin U$ und $x \notin V$).

Aufgabe 5. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.
(a) Betrachte die Teilmenge $V = \{(t,t^2,t^3);\ t \in k\} \subseteq \mathbb{A}^3(k)$. Zeige, dass V eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{A}^3(k)$ ist. Gib Erzeuger des Ideals $I(V)$ an.
(b) Sei $V = V(X^2 - YZ, XZ - X) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$. Zeige, dass V aus drei irreduziblen Komponenten besteht und bestimme die zugehörigen Primideale.

Aufgabe 6. Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein nicht-konstantes Polynom, und sei $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$ mit irreduziblen Polynomen f_i, so dass $(f_i) \neq (f_j)$ für alle $i \neq j$ gilt. Zeige, dass $\sqrt{(f)} = (f_1 \cdots f_k)$, und dass die irreduziblen Komponenten von $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ genau die $V(f_i)$, $i = 1, \dots, r$ sind.

Aufgabe 7. Wir identifizieren den Raum $M_2(k)$ der 2×2-Matrizen über k mit $\mathbb{A}^4(k)$ (mit Koordinaten a, b, c, d). Darin betrachten wir den Ort aller Matrizen, deren Quadrat verschwindet, also $V(\mathfrak{a})$ mit

$$\mathfrak{a} = (a^2 + bc, d^2 + bc, (a + d)b, (a + d)c).$$

Zeige, dass

$$\mathfrak{a} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{a}} = (ad - bc, a + d),$$

und dass $V(\mathfrak{a})$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^4(k)$ ist (der sogenannte *nilpotente Kegel*).

Aufgabe 8. Sei $\operatorname{char} k \neq 2$. Sei $Z_1 = V(U(T - 1) - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$, und sei $Z_2 = V(Y^2 - X^2(X + 1))$. Zeige, dass die Vorschrift $(t,u) \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ einen bijektiven Morphismus $Z_1 \to Z_2$ definiert, der jedoch kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 9. Zeige, dass für $n \geq 2$ die offene Unterprävarietät $\mathbb{A}^n(k) \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^n(k)$ keine affine Varietät ist. Wie ist es im Fall $n = 1$?

Aufgabe 10. Sei X eine Prävarietät und sei Y eine affine Varietät. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(\Gamma(Y),\Gamma(X)), \quad f \mapsto f^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f,$$

eine Bijektion ist. Folgere, dass $\operatorname{Hom}(X,\mathbb{A}^n(k)) = \Gamma(X)^n$.

Aufgabe 11. Sei X eine Prävarietät. Auf der Menge aller Paare (U,f), wobei $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und $f \in \Gamma(U)$, definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $(U,f) \sim (V,g)$, falls $W \subseteq U \cap V$ offen und nicht leer existiert, so dass $f|_W = g|_W$. Zeige, dass die Menge dieser Äquivalenzklassen sich auf natürliche Weise mit dem Funktionenkörper von X identifiziert.

Aufgabe 12◇. Sei $k = \mathbb{C}$. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ gröber als die komplex analytische Topologie ist. Zeige, dass $\exp\colon \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ kein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Aufgabe 13. Seien $n,d > 0$ ganze Zahlen. Seien $M_0, \dots, M_N \in k[X_0, \dots, X_n]$ alle Monome in $X_0, \dots, X_n$ vom Grad d.

(a) Der Ringhomomorphismus $\theta\colon k[Y_0, \dots, Y_N] \to k[X_0, \dots, X_n]$ sei gegeben durch $Y_i \mapsto M_i$. Sei $\mathfrak{a} = \ker \theta$. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist, das von homogenen Polynomen erzeugt wird. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ daher eine projektive Varietät $V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}^N(k)$ definiert.

(b) Betrachte den Morphismus

$$\rho_d\colon \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^N(k),\ (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (M_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : M_N(x_0, \dots, x_n)),$$

und zeige, dass ρ_d einen Isomorphismus $\mathbb{P}^n(k) \cong V_+(\mathfrak{a})$ von Prävarietäten induziert. Die Abbildung ρ_d heißt *d-Tupel-Einbettung* oder *d-fache Veronese-Einbettung*. Ist $V_+(\mathfrak{a})$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{P}^N(k)$?