

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 13, Abgabe am 10.07.2007

Aufgabe 49

- a) Sei $Z \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema, sei X ein reduziertes Schema, und sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus mit $f(X) \subseteq Z$. Zeige, dass dann f über Z faktorisiert.
- b) Sei X ein Schema, und Z eine abgeschlossene Teilmenge des zugrundeliegenden topologischen Raums. Zeige, dass ein eindeutig bestimmtes reduziertes abgeschlossenes Unterschema von X existiert, dessen zugrundeliegender topologischer Raum Z ist.

Aufgabe 50

Zu einem Schema X bezeichnen wir mit X_{red} das reduzierte abgeschlossene Unterschema mit demselben zugrundeliegenden topologischen Raum wie X .

Zeige: ist $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, und ist X reduziert, so faktorisiert f über $Y_{\text{red}} \rightarrow Y$. Insbesondere induziert jeder Morphismus $X \rightarrow Y$ einen natürlichen Morphismus $X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$, so dass die Zuordnung $X \mapsto X_{\text{red}}$ ein Funktor ist.

Aufgabe 51

Sei S ein Schema, und sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_S^{n+1}$ ein lokalfreier \mathcal{O}_S -Modul vom Rang 1.

Zeige, dass $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathcal{F}$ genau dann lokalfrei ist, wenn man S durch offene affine Teilmengen $U = \text{Spec } A$ überdecken kann, so dass für den A -Modul $F = \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{F}) \subseteq A^{n+1}$ gilt: F wird von einem Element ${}^t(a_0, \dots, a_n) \in A^{n+1}$ erzeugt, und es existiert ein i , für das a_i eine Einheit ist.

Hinweis: Ist F von der angegebenen Form, so kann man leicht einen surjektiven Homomorphismus $A^{n+1} \rightarrow A^n$ mit Kern F angeben.

Sei andererseits $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathcal{F}$ lokalfrei. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \text{Spec } A$ affin ist und dass \mathcal{F} und $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathcal{F}$ frei sind. Wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A^{n+1} \xrightarrow{\beta} A^n \longrightarrow 0$$

mit $\text{im } \alpha = F := \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{F})$. Schreibe $\alpha(1) = {}^t(a_0, \dots, a_n)$.

Begründe, dass ein A -Modulhomomorphismus $\gamma: A^n \rightarrow A^{n+1}$ mit $\beta \circ \gamma = \text{id}_{A^n}$ existiert, und dass man so einen Isomorphismus $A^{n+1} \cong F \oplus \text{im } \gamma$ erhält. Folgere, dass für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ die Abbildung $\alpha \otimes_A A/\mathfrak{m}$ injektiv

und folglich das Ideal (a_0, \dots, a_n) nicht in \mathfrak{m} enthalten ist. Also haben wir eine Überdeckung $\text{Spec } A = \bigcup_i \text{Spec } A_{a_i}$, und diese hat die gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe 52

Sei S ein Schema. Zeige, dass man eine in S funktorielle Bijektion

$$\mathbb{P}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^n(S) = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_S^{n+1} \text{ lokalfrei vom Rang } 1; \mathcal{O}_S^{n+1}/\mathcal{F} \text{ lokalfrei}\}$$

hat.

Hinweis: Benutze Aufgabe 51. Ist \mathcal{F} auf S mit den obigen Eigenschaften gegeben, so erhält man lokal auf S Morphismen nach $\mathbb{A}^n \cong U_i \subseteq \mathbb{P}^n$. Zeige, dass diese Morphismen verkleben. Ist andererseits $f: S \rightarrow \mathbb{P}^n$ gegeben, so verklebe die entsprechenden freien \mathcal{O}_S -Moduln auf den $f^{-1}(U_i)$.