Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann **WS 2007/08**

Gruppen, Ringe, Moduln

11. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Seien L, M, N Moduln über einem Ring R. Verwenden Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, um zu zeigen, daß es einen kanonischen Isomorphismus

$$L \otimes_R (M \otimes_R N) \cong (L \otimes_R M) \otimes_R N$$

gibt.

Aufgabe 2.

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ positiv. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(\mathrm{ggT}(m,n)\mathbb{Z})$.

Aufgabe 3.

Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R.

a) Zeigen Sie, daß
$$0 \to T(M) \to M \to M \otimes \mathrm{Quot}(R)$$
eine exakte Sequenz ist.

b) Sei $i : M' \hookrightarrow M$ die Inklusion eines Untermoduls. Zeigen Sie, daß
$$i \otimes \mathrm{id} : M' \otimes \mathrm{Quot}(R) \to M \otimes \mathrm{Quot}(R)$$
wieder injektiv ist.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = 0$ für jede Primzahl p. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

b) Geben Sie $\mathbb{Z}$-Moduln L, M, N und eine injektive Abbildung $f : M \to N$ an, für die $f \otimes \mathrm{id} : M \otimes L \to N \otimes L$ nicht injektiv ist.

Abgabe: Montag, 14. Januar 2008.