Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

WS 2007/08

Gruppen, Ringe, Moduln

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei G eine Gruppe.

a) Sei $U \subset G$ eine Teilmenge, so dass $gug^{-1} \in U$ für alle $g \in G$, $u \in U$. Zeigen Sie, dass die von U erzeugte Untergruppe ein Normalteiler von G ist.

Nun sei speziell $U = \{ghg^{-1}h^{-1} \; ; \; g, h \in G\}$. Die von U erzeugte Untergruppe $G' := \langle U \rangle$ heißt die Kommutatoruntergruppe von G. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über G'.

b) G' ist ein Normalteiler von G.

c) G/G' ist abelsch.

d) Ist N ein Normalteiler von G, so ist G/N genau dann abelsch, wenn $N \supset G'$.

Aufgabe 2:
Seien B bzw. U die folgenden Teilmengen von $G := GL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.

$$B := \{(a_{ij}) \in G \; ; \; a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$$
$$U := \{(a_{ij}) \in B \; ; \; a_{ii} = 1 \; , \; 1 \leq i \leq n\}$$

a) Zeigen Sie, dass B bzw. U zusammen mit der Matrizenmultiplikation Untergruppen von G sind. Zeigen Sie ferner, dass U ein Normalteiler von B ist.

b) Beweisen Sie, dass $B/U \cong (\mathbb{R}^\times)^n$.

c) Sind U bzw. B Normalteiler von G? (Begründung)

d) Zeigen Sie, dass G für $n \geq 2$ kein Normalteiler von $GL_n(\mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 3:
Sei G eine Gruppe. Die folgende Teilmenge heißt das Zentrum von G:

$$Z(G) := \{g \in G \; ; \; gh = hg \quad \forall h \in G\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein abelscher Normalteiler in G ist.

b) Berechnen Sie die Zentren von U, B, G aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4:

Sei G eine Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler von G ist.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil a) für Untergruppen vom Index 3 falsch ist.

c) Seien N, M Normalteiler von G, mit $N \cap M = \{e\}$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in M$, $n \in N$ die Gleichung $mn = nm$ gilt.

d) Sei H eine Untergruppe von G, für die die Implikation

$$Ha \neq Hb \Longrightarrow aH \neq bH$$

für alle $a, b \in G$ gilt. Ist H ein Normalteiler von G?

Abgabe: Montag, 29. Oktober 2007.