Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann **WS 2007/08**

Gruppen, Ringe, Moduln
4. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Bahnengleichung.

Aufgabe 2.

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl.

a) Zeigen Sie, daß alle p-Sylowgruppen von G zueinander konjugiert sind.

b) Zeigen Sie, daß die Anzahl der p-Sylowgruppen die Gruppenordnung $|G|$ teilt und daß sie $\equiv 1 \pmod p$ ist.

Aufgabe 3.

In welchem der folgenden Fälle handelt es sich um Ringe (Begründung)?

a) Sei $R \subset \mathbb{Q}$ die Menge der Brüche $\frac{a}{b}$, wobei b nicht durch 11 teilbar ist, zusammen mit den von $\mathbb{Q}$ induzierten Operationen.

b) Sei R die Menge der Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit den gewöhnlichen Matrizenoperationen.

Aufgabe 4.

Für $d \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ setze $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d};\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$ ist, welcher $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{d}$ enthält.

b) Zeigen Sie die Wohldefiniertheit der Abbildung

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] &\to \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{d} &\mapsto a^2 - b^2 d \end{aligned}$$

und die Gleichheit $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

c) Beweisen Sie die Gleichheit

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}];\ N(x) \in \mathbb{Z}^\times\}.$$

Bestimmen Sie für $d < 0$ die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ explizit. Finden Sie für $d = 2$ Elemente unendlicher Ordnung in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

Abgabe: Montag, 12. November 2007.