Prof. Dr. M. Rapoport
E. Hellmann

SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 1

Abgabe 11.04.2011

Aufgabe 1:

Identifiziere die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ via $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (reell) differenzierbar? Bestimme in diesen Punkten die *Wirtinger-Ableitungen*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

(i) $f : z \longmapsto \bar{z}^2$,

(ii) $f : z \longmapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{|z|^2}) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0, \end{cases}$

(iii) $f : z \longmapsto |z|$,

(iv) $f : z \longmapsto z^2 \exp(z-1) + 2z$

Aufgabe 2:

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeige, dass f genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ verschwindet. Bestimme für diesen Fall die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z}$ von f.

Aufgabe 3:

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst *zusammenhängend*, falls für je zwei offene Teilmengen V_1 und V_2 von U mit $U = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, folgt, dass $V_1 = \emptyset$ oder $V_2 = \emptyset$ gilt.
Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst *wegzusammenhängend*, falls es für je zwei Punkte $x, y \in U$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to U$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

(i) Zeige, dass jede wegzusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ auch zusammenhängend ist.

(ii) Zeige, dass jede zusammenhängende, *offene* Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 4:

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und betrachte die Abbildung

$$f_A : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

(i) Auf welcher Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist f definiert?

(ii) Zeige, dass $f_B \circ f_A = f_{BA}$, dort wo beide Funktionen definiert sind.

(iii) Bestimme das Bild von f_A. Was ist die Umkehrfunktion?

(iv) Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Bestimme alle Matrizen $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sodass $f_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.