Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 10

Abgabe 04.07.2011

Aufgabe 1:
Berechne die folgenden reellen Integrale:

(i) $\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(1+t^2)^2} dt$,

(ii) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)} dt$, für $a \notin [-1, 1]$.

Aufgabe 2:
Beweise den Satz von Mittag-Leffler für die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
Hinweis: Modifiziere den Beweis des Satzes von Mittag-Leffler aus der Vorlesung.

Aufgabe 3:
Es sei $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis. Konstruiere eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{U}$, die einfache Pole vom Residuum 1 genau in den Punkten $1 - \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ hat.

Aufgabe 4: Ziel dieser Aufgabe ist es die Partialbruchentwicklung des Cotangens zu beweisen. Gehe dazu wie folgt vor:

(i) Es sei

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty} \sum_{0 \neq n = -N}^{N} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right),$$

$$g(z) = \pi \cot(\pi z) = \pi i \frac{\exp(\pi i z) + \exp(-\pi i z)}{\exp(\pi i z) - \exp(-\pi i z)}$$

Zeige, dass f und g einen einfachen Pol mit Residuum 1 in jeder ganzen Zahl besitzen.

(ii) Zeige, dass $f(z+1) = f(z)$ und $g(z+1) = g(z)$ gilt.

(iii) Folgere, dass die Differenz $z \mapsto f(z) - g(z)$ eine beschränkte ganze Funktion ist.

(iv) Folgere, dass $f = g$ gilt. Hinweis: Berechne

$$\lim_{y\to\infty} f(iy) = -2i \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt.$$