Prof. Dr. M. Rapoport
E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 3

Abgabe 2.05.2011

Aufgabe 1:
Sei $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe, die gleichmässig auf einer unbeschränkten Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ gegen f konvergiert. Zeige, dass f ein Polynom ist.

Aufgabe 2:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Beschreibe das Bild des Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto a\exp(\pi i t) + b\exp(-\pi i t)$ und berechne die Wegintegrale

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z \, dz \text{ und } \int_\gamma \operatorname{Im} z \, dz.$$

Aufgabe 3:
Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Berechne das Wegintegral $\int_\gamma z^n \bar{z}^m dz$, wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \exp(2\pi i t)$,

(i) durch explizite Rechnung,

(ii) durch einsetzen von $\bar{z} = 1/z$ für $z \in \operatorname{im} \gamma$.

Aufgabe 4:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Ferner sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmässig gegen f konvergiert. Zeige, dass f eine Stammfunktion auf U besitzt, falls jedes f_n eine Stammfunktion auf U besitzt.

Aufgabe 5:
Zeige, dass $z \mapsto \operatorname{Re} z$ und $z \mapsto |z|$ auf $\mathbb{C}$ keine Stammfunktionen haben.

Aufgabe 6:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z \in U$, so dass $f'(z) \neq 0$. Zeige, dass es offene Umgebungen V von z und W von $f(z)$ sowie eine differenzierbare Abbildung $g : W \to V$ gibt, so dass g in $f(z)$ komplex differenzierbar ist und $f \circ g = \mathrm{id}$ gilt.

Aufgabe 7:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$.

(i) Zeige, dass es eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(g(z))$ gibt.
(Hinweis: Man betrachte die Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$.)

(ii) Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g^n = f$ gibt.