Prof. Dr. M. Rapoport
E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 4

Abgabe 9.05.2011

Aufgabe 1:
Welche der folgenden Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ besitzen eine holomorphe Fortsetzung nach $U \cup \{0\}$?

(i) $f(z) = \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$, $U = \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$,

(ii) $f(z) = \frac{z}{\exp(z)-1}$, $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

(iii) $f(z) = z^2\sin(\frac{1}{z})$, $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gebe $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f(z)| \leq a + b|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeige, dass f ein Polynom vom Grade $k \leq n$ ist.

(Hinweis: Benutze die Cauchysche Integralformel.)

Aufgabe 3:

(i) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Ferner sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig auf U und holomorph auf $U\backslash L$. Zeige, dass f auf ganz U holomorph ist.

(Hinweis: Benutze den Satz von Morera.)

(ii) (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\bar{U} = U$ (i.e. $z \in U \Rightarrow \bar{z} \in U$) und

$$f : \{z \in U \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Abbildung, die auf $U \cap \mathbb{H}$ holomorph und auf $U \cap \mathbb{R}$ reellwertig ist (wobei $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ die obere Halbebene ist, siehe Blatt 1, Aufgabe 4). Zeige, dass die Funktion $F : U \to \mathbb{C}$, die durch

$$z \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{falls } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{falls } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

definiert ist, holomorph ist.

Aufgabe 4: Man finde ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$, so dass es einen Punkt $z_0 \in U$ und eine Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ vom Konvergenzradius R gibt, die in einer Umgebung von z_0 gegen f konvergiert, nicht aber auf ihrem gesamten Konvergenzgebiet (d.h. es gibt ein $z \in U$ mit $|z - z_0| < R$ und $f(z) \neq \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$).

(Hinweis: Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$, nicht aber auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.)