Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 8

Abgabe 06.06.2011

Aufgabe 1:
Untersuche die folgenden Gebiete auf einfachen Zusammenhang:

(i) $\mathbb{C}\backslash\big(\{z = x + iy \mid x = 0,\ |y| \leq 1\} \cup \{z = x + iy \mid x > 0,\ y = \sin(1/x)\}\big)$,

(ii) $\{z = x + iy \mid 0 < x < 1,\ |y| < 1\}\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z = x + iy \mid x = \frac{1}{n},\ 0 < y \leq \frac{1}{2}\}$,

(iii) $\{z \mid |z| < 1\}\backslash\big(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\big)$.

Aufgabe 2:
Berechne die folgenden reellen Integrale:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$,

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Aufgabe 3:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und f_n eine Folge holomorpher Funktionen auf U, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Sei $\gamma : [0, 1] \to U$ eine einfach geschlossene Kurve, so dass f auf $\mathrm{Im}\,\alpha$ keine Nullstellen hat und sei $V = \mathrm{Int}\,\alpha$. Zeige, dass f_n für hinreichend große n genauso viele Nullstellen in V hat wie f.

Aufgabe 4:

(i) Finde konforme Abbildungen $f : U \to V$ zwischen den folgenden Gebieten $U, V \subset \mathbb{C}$ und bestimme die Bilder der Ränder der gegebenen Gebiete:

(a) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,z,\ \mathrm{Im}\,z > 0\}$ und $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,z > 0\}$,

(b) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Im}\,z > 0\}$ und $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,z,\ \mathrm{Im}\,z > 0\}$,

(c) $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,z > 0\}$,

(ii) Zu einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ bezeichne $\mathrm{Aut}(U)$ die Menge aller konformen Selbstabbildungen $f : U \to U$. Zeige, dass

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$$

gilt, wobei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,z > 0\}$ die obere Halbebene ist.