Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 9

Abgabe 20.06.2011

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ eine holomorphe Selbstabbildung des Einheitskreises $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, so dass $f(a) = a$ und $f(b) = b$ für zwei Punkte $a \neq b \in \mathbb{U}$ gilt. Zeige, dass $f(z) = z$.

Aufgabe 2:
Berechne die folgenden reellen Integrale:

(i) $\int_0^\infty \frac{(\log(t))^2}{1+t^2} dt$,

(ii) $\int_0^\infty \frac{\log(t)}{1+t^2} dt$.

(Hinweis: Definiere log als eine holomorphe Funktion auf der durch den negativ-imaginären Halbstrahl geschlitzten Ebene und integriere entlang eines Weges γ, der sich aus einem Halbkreis vom Radius $R \gg 0$, einem Halbkreis vom Radius $r \ll 1$ um den Nullpunkt und den Intervallen $[-R, -r]$ sowie $[r, R]$ zusammensetzt.)

Aufgabe 3:
Welche der folgenden Familien holomorpher Funktionen sind normal auf $\mathbb{U}$?

(i) $\mathcal{F} = \{f \mid |f^{(n)}(0)| \leq n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$,

(ii) $\mathcal{F} = \{f \mid f(0) = 0\}$,

(iii) $\mathcal{F} = \{f \mid 1 < |\mathrm{Im}\, f(z)| < 2 \ \forall z \in \mathbb{U}\}$.

Aufgabe 4: Es sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < R_1\}$ und $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r_2 < |z| < R_2\}$. Zeige, dass U und V genau dann konform äquivalent sind, wenn $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ gilt. Gehe für die eine Implikation wie folgt vor:

(i) Reduziere auf den Fall $r_1 = r_2 = 1$.

(ii) Sei $f : U \to V$ eine konforme Abbildung und z_n eine Folge in U.
Zeige, dass entweder $|f(z_n)| \to 1$, falls $|z_n| \to 1$ und $|f(z_n)| \to R_2$, falls $|z_n| \to R_1$, oder umgekehrt $|f(z_n)| \to R_2$, falls $|z_n| \to 1$ und $|f(z_n)| \to 1$, falls $|z_n| \to R_1$.

(iii) Wende wiederholt eine Variante des Spiegelungsprinzips an um f zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortzusetzen.

(iv) Folgere aus $|f(z)| = 1$ für $|z| = 1$, dass f von der Form $z \mapsto \alpha z^n$ ist.

(v) Folgere hieraus die Behauptung.