Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 9

Abgabe 15.06.2012

Aufgabe 1:
Betrachte die alternierende Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$, die durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimme eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass ${}^tABA$ Normalform hat.

Aufgabe 2:
Es seien $\alpha(\cdot,\cdot)$ und $\beta(\cdot,\cdot)$ Bilinearformen auf $\mathbb{R}^4$, die durch die Strukturmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Zeige, dass $(\mathbb{R}^4, \alpha)$ und $(\mathbb{R}^4, \beta)$ äquivalent sind.

Aufgabe 3:

(i) Zeige, dass keine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ existiert, so dass sowohl

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^tA \quad \text{als auch} \quad A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tA$$

Diagonalmatrizen sind.

(ii) Sei K ein Körper und $a, b \in K$. Zeige, dass es genau dann eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ mit

$$A \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

gibt, wenn die Gleichung $ax^2 + by^2 = 1$ eine Lösung $x, y \in K$ besitzt.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K$ sei $T_{ij}(\lambda)$ die Matrix, die auf der Diagonalen den Eintrag 1 hat, an der Stelle (i, j) dein Eintrag λ und ansonsten den Eintrag 0 hat. Betrachte den Endomorphismus

$$\Phi_{ij}(\lambda) : M_n(K) \longrightarrow M_n(K),$$

definiert durch $\Phi_{ij}(\lambda)(A) = T_{ji}(\lambda) A T_{ij}(\lambda)$.

(i) Zeige, dass $\Phi_{ij}(\lambda)$ die Menge der symmetrischen, der schiefsymmetrischen und (für $K = \mathbb{R}$) die Menge der positiv definiten symmetrischen Matrizen jeweils auf sich selbst abbildet.

(ii) Es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K. Zeige, dass man jede symmetrische Matrix durch wiederholtes Anwenden von Transformationen $\Phi_{ij}(\lambda)$ in eine Diagonalmatrix überführen kann.

(iii) Sei $K = \mathbb{R}$. Zeige, dass man jede positiv definite symmetrische Matrix in $M_n(\mathbb{R})$ durch wiederholtes Anwenden von Transformationen $\Phi_{ij}(\lambda)$ mit $i < j$ in eine Diagonalmatrix überführen kann.

Zeige anhand eines Beispiels, dass dies nicht für beliebige symmetrische Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$ möglich ist.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`