Lösungsskizze zur Nachklausur

Aufgabe 1:

a) Der Schnitt $H \cap K$ ist sowohl eine Untergruppe von H, als auch von K. Also teilt $|H \cap K|$ sowohl $|H|$, als auch $|K|$, und daher gilt $|H \cap K| = 1$, weil $|H|$ und $|K|$ teilerfremd sind.

b) Seien $h \in H$ und $k \in K$ beliebig. Dann gilt $hkh^{-1} \in K$ aufgrund der Normalteiler-Eigenschaft von H, und damit $hkh^{-1}k^{-1} \in K$. Analog zeigt man $hkh^{-1}k^{-1} \in H$, also insgesamt $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$, und mit Teil a) folgt $hkh^{-1}k^{-1} = 1$.

c) Aus Teil b) folgt, dass die Abbildung $\psi : H \times K \to G$, $(h,k) \to hk$ ein Morphismus von Gruppen ist. Aus Teil a) folgt, dass ψ injektiv ist, und daher auch surjektiv wegen $|G| = |H| \cdot |K|$.

Aufgabe 2:

Es gilt $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1) \cdot (X^2+1)$, und daher $R \simeq \mathbb{R}[X]/(X-1) \times \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$, weil $X-1$ und X^2+1 teilerfremd sind. Da $\mathbb{R}[X]/(X-1) \simeq \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$, gilt insgesamt $R \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

a) Die Menge der Nullteiler ist $\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,b) \mid b \in \mathbb{C}\}$.

b Die Menge der Einheiten ist $\{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}^\times,\ b \in \mathbb{C}^\times\}$.

c) Die einzigen Primideale sind $\mathbb{R} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{C}$.

Aufgabe 3:

Sei $f \in K[X]$. Man beweist die Aussage per Induktion nach $\deg(f)$. Ist $\deg(f) = 0$, liefert $a_0 = f$ und $a_i = 0$ für $i \geq 1$ die eindeutige Darstellung. Nun sei $\deg(f) \geq 1$. Nach dem euklidischen Algorithmus existieren eindeutige Polynome $p, q \in K[X]$ mit $\deg(q) < d$ und $f = pg + q$. Da $\deg(g) > 0$, ist $\deg(p) < \deg(f)$. Nach Induktionshypothese existiert eine eindeutige Darstellung der Form $p = \sum_{i=0}^{\infty} b_i g^i$ mit $\deg(b_i) < d$. Setze $a_0 = q$ und $a_i = b_{i-1}$ für $i \geq 1$, und damit

$$f \ = \ pg + q \ = \ (\sum_{i=0}^{\infty} b_i g^i) g + q \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^i.$$

Aus der eindeutigen Bestimmtheit von q folgt die Eindeutigkeitsaussage.

Aufgabe 4:

a) Die Primzahl 3 teilt alle Koeffizienten von $X^5 + 27X^4 + 108X^3 - 6X^2 - 30X + 48 \in \mathbb{Z}[X]$ außer dem Leitkoeffizienten und 3^2 teilt nicht 48. Daher ist das Polynom irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium.

b) Nach dem Reduktionskriterium genügt es zu zeigen, dass $f = X^3 + 207X^2 - 4X + 7$ in $\mathbb{F}_3[X]$ irreduzibel ist. Da $\deg(f) = 3$ ist, genügt es zu prüfen, dass f keine Nullstellen in $\mathbb{F}_3$ hat. Nun ist $f = X^3 - X + 1$ in $\mathbb{F}_3[X]$, und damit $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$. Also ist f irreduzibel.

c) Es genügt zu zeigen, dass das Polynom $X^3 + 32$ nach der Substitution $X \mapsto X + 1$ irreduzibel ist. Es ist $(X+1)^3 + 32 = X^3 + 3X^2 + 3X + 33$, und eine Anwendung des Eisensteinkriteriums an der Primzahl 3 liefert die Irreduzibilität.

Aufgabe 5:

a) Der Polynomring $K[X]$ ist euklidisch und daher ein Hauptidealring.

b) Der Ring $\mathbb{F}_p$ ist ein Körper, und somit sind die einzigen Ideale (0) und (1).

c) In dieser Aufgabe war ein **Tippfehler**, und sie wurde daher aus der Wertung genommen.

Gemeint war eigentlich der Ring $\mathbb{Z}[X]/(X^2+5)$ und nicht $\mathbb{Z}[X]/(X^5+5)$. Eine Lösungsskizze der korrekt gestellten Aufgabe lautet wie folgt. Es ist $\mathbb{Z}[X]/(X^2+5) = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Das Ideal $I = (2, 1+\sqrt{-5})$ ist prim, und die Elemente 2 und $1+\sqrt{-5}$ sind irreduzibel und nicht assoziiert. Daher ist I kein Hauptideal.
d) Es ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Nach der Vorlesung gilt $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, also ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper und damit ein Hauptidealring.

Aufgabe 6:

a) Angenommen es wäre $k(a) \neq k(a^2)$. Dann ist $X^2 - a^2$ das Minimalpolynom von a über $k(a^2)$, und daher ist $k(a^2)$ ein Zwischenkörper der Erweiterung $k(a)/k$ mit $[k(a) : k(a^2)] = 2$. Sei d der Grad des Minimalpolynoms von a über k. Dann gilt $d = [k(a) : k] = [k(a) : k(a^2)] \cdot [k(a^2) : k]$. Widerspruch zur Voraussetzung, dass d ungerade ist!

b) Sei $k = \mathbb{Q}$, und sei $a = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$. Das Minimalpolynom von a über k ist $X^2 + X + 1$, und es gilt $k(a) = k(a^2)$, denn $a^2 \cdot a^2 = a$.

c) Dasselbe Beispiel wie in b). Es ist $a^3 = 1$, daher $k(a^3) = \mathbb{Q} \neq k(a)$.