Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

SS 2013

Algebra I

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei R ein Ring, und seien $\{M_i\}_{i\in I}, N$ Moduln über R.
i) Zeige, dass es einen Isomorphismus

$$f : (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N)$$

gibt, der eindeutig durch die Eigenschaft

$$f((m_i)_{i\in I} \otimes n) = (m_i \otimes n)_{i\in I} \qquad \forall\, m_i \in M_i,\ n \in N$$

bestimmt ist.
ii) Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Zeige, dass die Moduln $M/\mathfrak{a}M$ und $(R/\mathfrak{a}) \otimes_R M$ zueinander isomorph sind.

Aufgabe 2:
Sei R ein Integritätsbereich. Ein R-Modul M heißt torsionsfrei, falls $rm = 0$, mit $r \in R$, $m \in M$, stets $r = 0$ oder $m = 0$ impliziert. Zeige folgende Aussagen.
i) Jeder flache R-Modul ist torsionsfrei.
ii) Ist R ein Hauptidealring, so ist umgekehrt auch jeder torsionsfreie R-Modul flach.
Tip: Reduziere auf den Fall eines endlich erzeugten R-Moduls.

Aufgabe 3:
Sei R ein Ring, und sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Sei $k = R/\mathfrak{m}$ der entsprechende Restklassenkörper. Zeige folgende Aussagen.
i) Der R-Modul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist auf natürliche Weise ein k-Vektorraum.
ii) Ist $\mathfrak{m}$ als R-Modul flach, so ist $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$.
iii) Sei $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in $n \geq 2$ Variablen über einem Körper K. Konstruiere einen R-Modul, der torsionsfrei aber nicht flach ist.

Aufgabe 4:
Sei R ein Ring, und sei $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.
i) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M = 0$ genau dann, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM = 0$.
ii) Sei $f : M \to M'$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten R-Moduln. Ist R noethersch, so ist $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}M'$ genau dann ein Isomorphismus, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM' \subset \mathrm{im}(f)$ und $s\ker(f) = 0$.

Abgabe: Donnerstag, 02. Mai 2013.