Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch **SS 2016**

Algebra I

6. Übungsblatt

Aufgabe 3:

Die Gruppe $\mathbb{Z}/3$ operiere auf der k-Algebra $k[X, Y]$ durch Multiplikation mit einer primitiven dritten Einheitswurzel ζ,

$$\mathbb{Z}/3 \ni \bar{\nu} \mapsto (X \mapsto \zeta^\nu X, Y \mapsto \zeta^\nu Y).$$

Berechne den Ring der invarianten Elemente $k[X, Y]^{\mathbb{Z}/3}$. Versuche diesen Ring durch Erzeuger und Relationen darzustellen. Mit anderen Worten, finde einen Isomorphismus

$$k[X, Y]^{\mathbb{Z}/3} \cong k[Y_1, \ldots, Y_n]/(f_1, \ldots, f_m).$$

Lösung:

Es ist klar, dass

$$k[X, Y]^{\mathbb{Z}/3} = k[X^3, X^2Y, XY^2, Y^3].$$

Gesucht sind noch die Relationen unter den vier Erzeugern, das heißt gesucht ist der Kern des Ringhomomorphismus

$$\psi : k[R, S, T, U] \twoheadrightarrow k[X, Y]^{\mathbb{Z}/3}$$
$$R, S, T, U \mapsto X^3, X^2Y, XY^2, Y^3.$$

Wir definieren das Ideal $I := (RU - ST, S^2 - RT, T^2 - US) \subset k[R, S, T, U]$. Offensichtlich ist $I \subset \ker(\psi)$ und wir behaupten, dass Gleichheit vorliegt. Zu zeigen ist also, dass $k[R, S, T, U]/I$ ein Integritätsbereich ist.

Lemma 1. *Sei A ein Ring und $f \in A$ kein Nullteiler. Dann ist der kanonische Morphismus in die Lokalisierung*

$$A \longrightarrow A_f$$

injektiv.

Proof. Das ist klar. □

Lemma 2. *Sei $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Sei $f \in A$ kein Nullteiler, sodass $\varphi(f)$ ebenfalls kein Nullteiler ist. Sei die Lokalisierung*

$$\varphi_f : A_f \twoheadrightarrow B_{\varphi(f)}$$

ein Iso. Dann ist auch φ ein Iso.

Proof. Zu zeigen ist nur, dass φ injektiv ist. Das kann man aber nach dem vorigen Lemma nach Einbettung in die Lokalisierungen überprüfen. □

Wir möchten dieses Lemma auf den surjektiven Ringhomomorphismus

$$k[R, S, T, U]/I \twoheadrightarrow k[X^3, X^2Y, XY^2, Y^3]$$

und das Element ST anwenden.

Lemma 3. *Die Elemente $S, T \in k[R, S, T, U]/I$ sind keine Nullteiler.*

Proof. Wegen der Symmetrie bezüglich der Vertauschung von X und Y genügt es, den Fall der Variable T zu betrachten. Sei

$$h := f_1(RU - ST) + f_2(S^2 - RT) + f_3(T^2 - US) \in I$$

mit $T \mid h$ (im Polynomring $k[R, S, T, U]$). Zu zeigen ist $h/T \in I$.

Wir können annehmen, dass kein Monom in einem der f_i durch T teilbar ist (ansonsten substrahieren wir den durch T teilbaren Teil). Dann gilt

$$f_1RU + f_2S^2 - f_3US = 0,$$

denn diese Gleichung beschreibt genau die Summanden von h in T-Grad 0. Folglich können wir schreiben,

$$f_1 = Sf_1', \quad \text{und} \quad f_2 = Uf_2'.$$

Einsetzen und Division durch US liefert

$$f_3 = Rf_1' + Sf_2'.$$

Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{h}{T} &= - f_1S - f_2R + f_3T \\ &= - f_1'S^2 - f_2'RU + (f_1'R + f_2'S)T \\ &= f_1'(RT - S^2) + f_2'(ST - RU) \in I. \end{aligned}$$

□

Jetzt kann man Lemma 2 auf das Element ST anwenden.