Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. J. Ludwig

WS 2016/17

Algebra II

11. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei $K_n = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$, wobei ζ_{p^n} eine primitive p^n-te Einheitswurzel ist. Zeige, dass die Verzweigungsgruppen von $K_n/\mathbb{Q}_p$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} G_s &= \mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}_p) && \text{für} \quad s = 0, \\ G_s &= \mathrm{Gal}(K_n/K_i) && \text{für} \quad p^{i-1} \leq s \leq p^i - 1, \;\; 1 \leq i \leq n-1, \\ G_s &= 1 && \text{für} \quad p^{n-1} \leq s. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Sei L/K eine Galoiserweiterung algebraischer Zahlkörper. Ist die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ nicht zyklisch, so sind nur endlich viele Primideale von K unzerlegt.

Aufgabe 3:
Sei K ein algebraischer Zahlkörper, $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen in K, und sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung. Sei $\mathcal{O}_L$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}$ in L. Ferner sei $\mathfrak{P}$ ein unverzweigtes Primideal von $\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}$. Die Frobeniussubstitution $(\mathfrak{P}, L/K) \in \mathrm{Gal}(L/K)$ ist das eindeutig bestimmte Element in $D_{\mathfrak{P}}(L/K)$, das auf dem Restklassenkörper den Frobeniusautomorphismus induziert.

Sei nun E ein Zwischenkörper von L/K, $\mathcal{O}_E$ der ganze Abschluß von $\mathcal{O}$ in E und f der Trägheitsgrad von $\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_E$ über K.

a) Es gilt $(\mathfrak{P}, L/E) = (\mathfrak{P}, L/K)^f$.

b) Ist E/K galoissch, so ist $(\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_E, E/K)$ gerade die Einschränkung von $(\mathfrak{P}, L/K)$ auf E.

Aufgabe 4:
Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{-1}]$. Die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist eine abelsche Galois-Erweiterung. Bestimme für alle Primzahlen $p \neq 2, 5$ die zugehörige Frobeniussubstitution.

Abgabe: Montag, 23. Januar 2017.