Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. J. Ludwig

WS 2016/17

Algebra II

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei $L/\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung von Grad n, und sei R der Ring der ganzen Zahlen von L. Bilden $x_1, \ldots, x_n \in R$ eine Basis von L über $\mathbb{Q}$ und ist die Diskriminante $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ quadratfrei, so ist $x_1, \ldots, x_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von R.

Aufgabe 2:
Sei $K = \mathbb{Q}(x)$, wobei x eine Nullstelle des Polynoms $X^3 - X - 1$ ist. Zeige, dass $1, x, x^2$ eine $\mathbb{Z}$-Basis des Ringes der ganzen Zahlen von K ist.

Aufgabe 3:
Sei K ein algebraischer Zahlkörper und R der Ring der ganzen Zahlen von K. Zeige, dass ein Element $u \in R$ genau dann eine Einheit von R ist, wenn $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(u) \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 4:
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, Restklassenkörper k und Quotientenkörper K. Es sei $f \in R[X]$ ein Eisensteinpolynom, d.h.

$$f \;=\; X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad a_i \in \mathfrak{m} \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n, \quad a_n \notin \mathfrak{m}^2,$$

und θ eine Nullstelle von f. Dann ist $S = R[X]/f = R[\theta]$ ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper k und somit voll verzweigt über R. Insbesondere ist S der ganze Abschluss von R in $L = K(\theta)$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass S ein lokaler Ring mit Restklassenkörper k ist. Dann verifiziere eines der Kriterien für diskrete Bewertungsringe.

Abgabe: Montag, 07. November 2016.