Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. J. Ludwig **WS 2016/17**

Algebra II

9. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $x \in K$. Gilt $\|x\| = 1$ für alle bis auf höchstens einen der normalisierten Absolutbeträge von K, so ist x eine Einheitswurzel.

Aufgabe 2:
Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Ganzheitsring R und Restklassenkörper k mit $|k| = p^r$. Sei K_0 die maximal unverzweigte Zwischenerweiterung mit Ganzheitsring R_0.

a) Es gilt $R_0 = \mathbb{Z}_p[\zeta]$, wobei ζ eine primitive $(p^r - 1)$-te Einheitswurzel ist.

b) Zeige, dass $K_0/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Galoiserweiterung von Grad r ist.

c) Ferner sei $K/\mathbb{Q}_p$ eine Galoiserweiterung. Zeige, dass der kanonische Homomorphismus von Galoisgruppen

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$$

durch $\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ faktorisiert und dort einen Isomorphismus $\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$ liefert.

Aufgabe 3:
Sei p eine Primzahl, K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und L und E endliche Körpererweiterungen von K.

a) Für die Verzweigungsindizes gilt: $e(LE/E) \leq e(L/K)$.

b) Sind die Erweiterungen E/K und L/K unverzweigt, so auch LE/K.

c) Zeige anhand eines Beispiels, daß LE/K nicht notwendig voll verzweigt ist, auch wenn E/K und L/K voll verzweigt sind.

Aufgabe 4:
Sei p eine Primzahl, v die p-adische Bewertung.

a) Ist $n = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_i < p$, so ist $v(n!) = \frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^{r} a_i (p^i - 1)$.

Sei nun K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, $|\cdot|$ die Fortsetzung des p-adischen Absolutbetrages auf K. Sei $x \in K$.

b) Die Reihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert genau dann, wenn $|x| < p^{-\frac{1}{p-1}}$.

c) Die Reihe $\log(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$.

Abgabe: Montag, 19. Dezember 2016.