Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. J. Ludwig

Wintersemester 2016/17

Klausur zur Vorlesung
Algebra II
09.02.2017

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
erreichbare Punkte	20	20	20	20	20	100
erreichte Punkte						

Note:

Aufgabe 1: $(5+5+5+5)$
Entscheide, welche der folgenden Ringe Dedekindringe sind (mit Begründung).
i) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$
ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$
iii) $\mathbb{Z}[X]$
iv) Der ganze Abschluss $\bar{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ in $\bar{\mathbb{Q}}$, wobei $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ der Körper der algebraischen Zahlen ist.

Aufgabe 2: $(10 + 10)$

Sei $d \in \mathbb{Z} \backslash \{0, 1\}$ quadratfrei und sei $p \geq 3$ eine Primzahl mit $(p, d) = 1$. Sei $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Das Ideal $p\mathcal{O}$ ist ein Primideal in $\mathcal{O}$.

ii) Die Gleichung $x^2 \equiv d \pmod{p}$ ist unlösbar.

Aufgabe 3: $(5+5+5+5)$

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$.

i) Man bestimme die absolute Diskriminante d_K von K.

ii) Zeige, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

iii) Man bestimme die Minkowski-Konstante $M = (\frac{4}{\pi})^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|d_K|}$ und zeige (durch Angabe eines Erzeugenden), dass die Klassenzahl ≤ 2 ist.

iv) Bestimme eine Fundamentaleinheit und ihre Norm. Gib die Struktur der Einheitengruppe $\mathcal{O}_K^*$ an.

Aufgabe 4: $(10 + 10)$

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl.

i) Zeige, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ die Gruppe der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln enthält.

ii) Zeige, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ nicht die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln enthält.

Aufgabe 5: $(4 + 8 + 8)$

i) Sei k ein endlicher Körper und $|\cdot| : k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Absolutbetrag auf k. Zeige, dass $|x| = 1$ für alle $x \in k^\times$.

ii) Zeige, dass $\mathbb{F}_p[\![X]\!]$ ein diskreter Bewertungsring ist und gebe einen zugehörigen nicht-archimedischen Absolutbetrag auf dem Quotientenkörper $\mathbb{F}_p(\!(X)\!)$ an.

iii) Sei K ein Körper mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$. Seien $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$. Zeige, dass $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.