Algebra II

Lösungsskizze zur Klausur

Aufgabe 1:
Entscheide, welche der folgenden Ringe Dedekindringe sind (mit Begründung).
i) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$
ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$
iii) $\mathbb{Z}[X]$
iv) Der ganze Abschluss $\bar{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ in $\bar{\mathbb{Q}}$, wobei $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ der Körper der algebraischen Zahlen ist.

Zu i): Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ist ein Hauptidealring, insbesondere noethersch, ganzabgeschlossen und jedes nicht-triviale Primideal ist maximal. Also ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ein Dedekindring.
Zu iii): Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ ist nicht ganzabgeschlossen, z.B. ist das Element des Quotientenkörpers $\frac{1+\sqrt{13}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ ganz, aber nicht in $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ enthalten. Also ist $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ kein Dedekindring.
Zu iii): Das Ideal (X) ist nicht-trivial und prim, aber nicht maximal. Daher ist $\mathbb{Z}[X]$ kein Dedekindring.
Zu iv): Der Ring $\bar{\mathbb{Z}}$ ist nicht noethersch und daher kein Dedekindring.

Aufgabe 2:
Sei $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ quadratfrei und sei $p \geq 3$ eine Primzahl mit $(p,d) = 1$. Sei $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
i) Das Ideal $p\mathcal{O}$ ist ein Primideal in $\mathcal{O}$.
ii) Die Gleichung $x^2 \equiv d \pmod p$ ist unlösbar.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Ganzheitsring $\mathcal{O}$ entweder $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ oder $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ ist. Insbesondere gilt $\mathcal{O}[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\sqrt{d}]$. Wegen $p \neq 2$ erhält man $\mathcal{O}/p\mathcal{O} = \mathbb{F}_p[X]/(X^2 - d)$. Daher ist $p\mathcal{O}$ genau dann prim, wenn $X^2 - d$ in $\mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist, was äquivalent zur Unlösbarkeit von $x^2 \equiv d \pmod p$ ist.

Aufgabe 3:
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$.
i) Man bestimme die absolute Diskriminante d_K von K.
ii) Zeige, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
iii) Man bestimme die Minkowski-Konstante $M = (\frac{4}{\pi})^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|d_K|}$ und zeige (durch Angabe eines Erzeugenden), dass die Klassenzahl ≤ 2 ist.
iv) Bestimme eine Fundamentaleinheit und ihre Norm. Gib die Struktur der Einheitengruppe $\mathcal{O}_K^*$ an.

Zu i): Es ist $7 \equiv 3 \pmod 4$. Damit ist nach Vorlesung $d_K = 4 \cdot 7 = 28$.
Zu ii): Nach Vorlesung ist für $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ quadratfrei, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$, falls $d \equiv 1 \pmod 4$

und $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ falls $d \equiv 3 \pmod 4$. Da $7 \equiv 3 \pmod 4$, befinden wir uns im zweiten Fall, d.h. $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

Zu iii): Es gilt $r_2 = 0$. Damit ist

$$M = \frac{2}{2^2} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7} < 3.$$

Nach der Vorlesung enthält jede Idealklasse ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ von Norm $\leq M < 3$. Daher wird die Klassengruppe $\mathfrak{cl}_K$ von den Primidealen mit Norm ≤ 2 erzeugt. Aus $\mathrm{Nm}(\mathfrak{a}) = 1$ folgt, dass $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_K$, d.h. solch ein Ideal $\mathfrak{a}$ bestimmt die triviale Klasse. Über der Primzahl 2 ist die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ nach i) verzweigt mit

$$2\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^2,$$

d.h. $\mathfrak{p}$ erzeugt $\mathfrak{cl}_K$.

Zu iv): Für $b = 1, 2, 3$ ist $7b^2 = 7, 28, 63$. Wir sehen, dass $63 = 64 - 1$ sich um -1 von einer Quadratzahl unterscheidet. Folglich ist die Lösung der Pell'schen Gleichung $a^2 - 7b^2 = \pm 1$ mit b minimal gegeben durch $b = 3, a = 8$. Somit ist nach Vorlesung $\varepsilon = 8 + 3\sqrt{7}$ eine Fundamentaleinheit. Es ist $\mathrm{Nm}(\varepsilon) = 1$ und $\mathcal{O}_K^* \cong \mu_K \times \mathbb{Z} \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}$ erzeugt wird durch ε.

Aufgabe 4:

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl.

i) Zeige, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ die Gruppe der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln enthält.

ii) Zeige, dass $\mathbb{Q}_p^\times$ nicht die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln enthält.

Zu i): Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\mathbb{Z}_p$ kanonisch zu dem Ring der Wittvektoren $W(\mathbb{F}_p)$ isomorph ist. Der Teichmüller-Lift ist ein injektiver Homomorphismus von Gruppen

$$\mu\colon \mathbb{F}_p^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times.$$

Das Bild $\mu(\mathbb{F}_p^\times)$ ist die Gruppe der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln. Alternativ kann man auch das Henselsche Lemma auf das Polynom $X^{p-1} - 1$ anwenden.

Zu ii): Sei ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel und sei $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Erweiterung $K/\mathbb{Q}_p$ voll verzweigt vom Grad $p-1$ ist. Daher kann $\mathbb{Q}_p^\times$ nicht die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln enthalten.

Aufgabe 5:

i) Sei k ein endlicher Körper und $|\cdot| : k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Absolutbetrag auf k. Zeige, dass $|x| = 1$ für alle $x \in k^\times$.

ii) Zeige, dass $\mathbb{F}_p[\![X]\!]$ ein diskreter Bewertungsring ist und gebe einen zugehörigen nicht-archimedischen Absolutbetrag auf dem Quotientenkörper $\mathbb{F}_p(\!(X)\!)$ an.

iii) Sei K ein Körper mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$. Seien $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$. Zeige, dass $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Zu i): Jedes Element $x \in k^\times$ ist eine Einheitswurzel, daher ist $|x|^n = |x^n| = 1$ für ein $n \geq 0$, also auch $|x| = 1$.

Zu ii): Sei

$$|\cdot|:\mathbb{F}_p(\!(X)\!)\to\mathbb{R}_{\geq 0},\ f=\sum_{n\geq N}^{\infty}a_nX^n\mapsto p^{-v(f)},$$

wobei $v(f)\in\mathbb{Z}=\min\{n|a_n\neq 0\}$. Dann ist $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf $\mathbb{F}_p(\!(X)\!)$ und $\mathbb{F}_p[\![X]\!]=\{f\in\mathbb{F}_p(\!(X)\!):|f|\leq 1\}$ ist der zugehörige Einheitsball, insbesondere nach Vorlesung ein diskreter Bewertungsring.

Zu iii): Wir können annehmen, dass $|x|<|y|$. Da $|\cdot|$ nicht-archimedisch ist, gilt $|x+y|\leq\max\{|x|,|y|\}$. Wäre $|x+y|<|y|$, dann hätten wir einen Widerspruch durch

$$|y|=|y+x-x|\leq\max\{|x+y|,|x|\}<|y|.$$